Kovács Barna

ELEMI MATEMATIKA

EGYETEMI JEGYZET TANÍTÓKÉPZŐSÖKNEK

Presa
Universitară
Clujeană

Kovács Barna

Elemi matematika

Presa Universitară Clujeană

2018

Referenţi ştiinţifici:

Conf. univ. dr. Finta Béla

Conf. univ. dr. Zsoldos-Marchis Julianna

ISBN 978-606-37-0398-0

Universitatea Babeş-Bolyai
Presa Universitară Clujeană
Director: Codruţa Săcelean
Str. Hasdeu nr. 51
400371 Cluj-Napoca, România
Tel./fax: (+40)-264-597.401
E-mail: editura@editura.ubbcluj.ro
http://www.editura.ubbcluj.ro

Tartalom

ELŐSZÓ

A jegyzet a Babeş – Bolyai Tudományegyetem marosvásárhelyi kihelyezett iskolai és óvodai pedagógiai karán elhangzó, a másodéveseknek szánt *Matematika elemei* előadás anyagát tartalmazza. A jegyzet a következő fejezeteket tárgyalja, a követelményeknek megfelelő szinten:

- A logika elemei,
- Halmazelméleti alapfogalmak,
- Relációk,
- Függvények,
- A természetes számok halmaza,
- Egész számok halmaza, racionális számok halmaza, való számok halmaza,
- Kombinatorika,
- A valószínűségszámítás elemei,
- A skatulyaelv,
- A statisztika elemei.

Minden fejezetet tartalmaz egy sor megoldott feladatot, és minden fejezet ajánlott feladatokkal zárul. Ezek a feladatok a szemináriumi aktivitást hivatottak elősegíteni.

A szerző köszönetet mond dr.Marchiş-Zsoldos Juliannának és dr. Finta Bélának a kézirat lektorálása során minden kis részletre kiterjedő észrevételeikért, önzetlen munkájukért. A kézirat általuk lett lényegesen jobb, érthetőbb. Köszönöm a marosvásárhelyi kihelyezett tagozat mindenkori másodéves diákjainak az elszánt feladatmegoldó munkát: nélkülük ez a jegyzet nem született volna meg.

Marosvásárhely, 2018. július 9-én.

1. A LOGIKA ELEMEI

1.1 MATEMATIKAI KIJELENTÉSEK

Minden tudomány a megértetés gondjaival küzd. A megállapítások, tételek, de a feltevések is egyértelműek kell, hogy legyenek, a félreértés veszélye nélkül. A matematikában már rég áttértek a formális nyelvek használatára. Ezek a mesterséges nyelvek a beszélt nyelv logikailag fontos elemeit tartalmazzák csupán, a félreértés veszélyét elkerülve.

Egy matematikai szöveg alapeleme a kijelentés. Egy kijelentéstől elvárjuk, hogy azt az egyértelműen hamis vagy egyértelműen igaz osztályba tudjuk sorolni, azaz minden matematikai - és nem csak matematikai! - kijelentéshez igazságértéket kapcsolunk. Ez utóbbi lehet igaz vagy hamis, amennyiben a kijelentés tartalma igaz vagy hamis. Amennyiben ez a kapcsolás valamiért nem jöhet létre, akkor a kijelentés sem nem hamis sem nem igaz. Az igaz kijelentések logikai értéke 1, a hamis kijelentések logikai értéke 0.

Logikai kijelentésnek vagy ítéletnek nevezünk egy kijelentő mondatot, ha egyértelműen eldönthető, hogy a benne foglalt állítás igaz vagy hamis.

A logikai ítéletet a továbbiakban ítéletnek nevezzük, de ugyanezt fogjuk leírni a „*kijelentés*” vagy „*állítás*” szavakkal is.

I. A következő kijelentésekről egyértelműen kijelenthető, hogy azok igazak:
   - A Fadrusz János által készített Mátyás-szobor Kolozsváron található
   - Bolyai János matematikus Marosvásárhelyen halt meg.
   - A Föld geoid alakú.
   - A hét napjai sorában szerda után csütörtök következik.

II. A következő kijelenések hamisak:
   - A tízes számrendszerben a 25 egy páros szám.
   - Magyarország fővárosa Sopron.
   - Európa egy sziget.

III. A következő kijelentésekről nem tudjuk eldönteni egyértelműen, hogy azok igazak-e vagy hamisak:
   - Az igazságos büntetés eléri a bűnözőt.
   - Minden 2-nél nagyobb páros szám előállítható két prímszám összegeként. (*Goldbach* sejtés)
   - Nagypapa sokat cigarettázott.

IV. A kijelentések egy speciális fajtája az, amelyik egyidejűleg igaz is meg hamis is: ezek a paradoxonok. Igen sok érdekes paradoxonról tájékoztatnak bennünket a kultúrtörténeti könyvek, említsünk meg kettőt:

- A krétai *Epimenidész* szerint „*Minden krétai hazudik*”. Ha minden krétai hazudik, akkor Epimenidész állítása sem igaz, illetve ha nem minden krétai hazudik, például Epimenidész igazat mond, akkor kijelentése nem igaz, hiszen ő maga krétai…(Epimenidész paradoxon);
- A fától bizonyos távolságra áll egy ember és a fa fele dob egy követ. Amennyiben a kő a fa fele mozdul, úgy a kőnek egyszer meg kell tennie a dobó és a fa közötti távolság felét. Ehhez viszont meg kell tennie a távolság felének a felét és így tovább, végtelenszer. Következtetésképpen a kő nem éri el a fát… (*Zénón* paradoxon).

Az I. és II. csoport mondatai kijelentések - szokás ezeket még ítéleteknek is nevezni - mivel igazságértékük egyértelműen megállapítható.

1.2 LOGIKAI MŰVELETEK

Amennyiben p és q egy-egy logikai ítélet, akkor a ¬ p („*non* p”), a p ∧ q („p *és* q”) vagy *konjunkció*, a p ∨ q („p *vagy* q”) vagy *diszjunkció*, a p→q („p-ből *következik* q”) vagy *implikáció* illetve a p↔q („p *ekvivalens* q-val”) vagy *ekvivalencia* is szintén egy-egy logikai ítélet. A felsorolt ítéletek logikaiérték-táblázatait alább mutatjuk be (1- igaz ítéletet jelöl, míg 0 hamis ítéletet), 1. és 2. táblázat:

1. táblázat

p	¬ p
1	0
0	1

2. táblázat

p	q	p ∧ q	p ∨ q	p→q	p↔q
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

A táblázatokban leírtakat szavakban is összefoglalhatjuk:

a) Két kijelentés konjunkciója (p ∧ q) igaz, ha mindkét kijelentés igaz.
b) Két kijelentés diszjunkciója (p ∨ q) igaz, ha legalább az egyik kijelents igaz.

Példák

Szándékosan tartózkodunk a bonyolultabb matematikai kapcsolódású kijelentésektől: nem feltételezzük, hogy az olvasó feltétlenül járatos a matematika minden fejezetében.

- Tagadás: „*a 2000 év szökőév volt!*“ állítás tagadása: „*Nem igaz, hogy a 2000 év szökőév volt*”. Megfigyelhető, hogy az eredeti kijelentés igaz, míg ennek tagadása egy hamis állítás.
- Konjunkció: legyen a *p* kijelentés „*2 osztója 8-nak*” illetve a *q* kijelentés: „*2 osztója 9-nek*”. A *p* **és** *q* kijelentés a következő: „*2 osztója 8-nak* **és** *2 osztója 9-nek*”. Könnyen belátható ennek a konjunkcióval előállított kijelentésnek az igazságértéke. Miért *hamis* ez a kijelentés?
- Diszjunkció: legyen a *p* kijelentés: „*holnap esni fog*”, a *q* kijelentés pedig: „*holnap nem fog esni*”. A *p* **vagy** *q* kijelentés a következő: „*holnap esni fog* **vagy** holnap *nem fog esni*”. Belátható, hogy ez a kijelentés mindig igaz. Ezeket fajta a kijelentéseket, amelyek mindig igazak, tautológiáknak nevezzük, ezekről a kijelentéstípusokról még lesz szó.
- Implikáció: legyen a *p* kijelentés: „*1 + 1> 2*” a *q* kijelentés pedig „*én vagyok a város polgármestere*”. A *p* **implikálja** *q*-t kijelentés a következő: „**ha** *1 + 1> 2* **akkor** *én vagyok a város polgármestere*”. A kijelentés, bármennyire is furcsa, de egy logikai igazság. Ez lenne, a *hamisból minden következik* elve. Az internetet böngészve, az elv latin eredetijét is megtalálhatjuk, íme: “*ex falso sequitur quodlibet*”.
- Az ekvivalencia szemléltetésére két implikációt választunk. Az első implikáció: „**ha** *a lány szőke,* **akkor** *Jancsi táncolni fog vele*”, azaz „*a lány szőke*” → „*Jancsi táncol vele*”. A kijelentést megvizsgálva, megállapíthatjuk, hogy nem biztos, hogy Jancsi csak szőkékkel táncol, illetve az is

előfordulhat, hogy a táncrend szerint egy legényest is eljár majd. A kijelentésből viszont következik, hogy a lány szőkesége Jancsit táncolásra készteti (az esetleges visszautasítást nem tartjuk valószínűnek a példánkban). A második implikáció: „**ha** *Jancsi táncol*, **akkor** *a lány szőke*”, vagyis „*Jancsi táncol egy lánnyal*” →„*a lány szőke*”. Megállapítjuk, hogy amennyiben Jancsi egy lánnyal táncol, az a lány biztosan szőke. A két implikációt az *és* művelettel egybekapcsolva azt kapjuk, hogy Jancsi akkor és csak akkor táncol, ha a lány szőke. Úgy is mondhatjuk, hogy *annak szükséges és elégséges feltétele, hogy Jancsi páros táncot táncoljon az, hogy a lány szőke legyen*. Megállapítjuk, hogy a „*Jancsi egy lánnyal táncol*” és „*a lány szőke*” kijelentések ekvivalensek!

Az **és**, **vagy**, **nem** műveletekkel illetve a **ha**… **akkor** implikációval és az **akkor és csak akkor** ekvivalenciával - amelyek természetesen szintén műveletek!- egybekapcsolva az egyszerű kijelentéseket, összetett kijelentéseket kapunk, melyek tanulmányozásával a *kijelentéskalkulus* foglalkozik.
Legyen a $p_1, p_2, \ldots p_n$ állítások sorozata. Ha az állítássorozat bármely értékére a $P(p_1, p_2, \ldots p_n)$ összetett állítás hamis, akkor a P összetett állítás egy *antilogiának*, ellentmondásnak nevezzük. Ellenkezőleg, ha a $p_1, p_2, \ldots p_n$ állítássorozat bármely értékére a P összetett állítás igaz, akkor P egy *tautológia*, vagy logikai törvény.
Tautológiák, amelyek alaptulajdonságokat rögzítenek

1) $p \lor q \equiv q \lor p$ a diszjukció kommutatív (felcserélhető)
2) $p \land q \equiv q \land p$ a konjunkció kommutatív (felcserélhető)
3) $(p \land q) \land r \equiv p \land (q \land r)$ a konjunkció asszociatív (csoportosítható)
4) $(p \lor q) \lor r \equiv p \lor (q \lor r)$ a diszjunkció asszociatív (csoportosítható)
5) $(p \lor q) \land r \equiv (p \land r) \lor (q \land r)$ a konjunkció disztributív a diszjunkcióra nézve

Az 5. tulajdonságot a 3. táblázatban leírtakkal bizonyítjuk:

3. táblázat

1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**
p	q	r	$(p \lor q)$	$(p \land r)$	$(q \land r)$	$(p \lor q) \land r$	$(p \land r) \lor (q \land r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Megfigyelhető, hogy a **7** és **8** oszlop egyes cellái soronként megegyeznek, az **1**,**2** és **3** oszlop bármelyik sorának hármasát vennénk is, ezzel bizonyítottuk az 5. tulajdonságot.

1.3 MEGOLDOTT FELADATOK

1) Bizonyítsd be, hogy a következő összefüggések tautológiák
   a) $(p \land q) \rightarrow p$
      Megoldás: Elkészítjük a megfelelő logikai értéktáblázatot (4. táblázat):

4. táblázat

p	q	$(p \wedge q)$	$(p \wedge q) \rightarrow p$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

Megfigyelhető, hogy az utolsó oszlop elemei rendre 1-gyel egyenlők, vagyis a $(p \wedge q) \rightarrow p$ összefüggés igaz, a p és q kijelenések bármely értékére, így az összefüggés tautológia volta bizonyított.

b) $\left(p \wedge (p \rightarrow q)\right) \rightarrow q$

Megoldás: Elkészítjük a megfelelő logikai értéktáblázatot (5. táblázat):

5. táblázat

p	q	$p \rightarrow q$	$p \wedge (p \rightarrow q)$	$\left(p \wedge (p \rightarrow q)\right) \rightarrow q$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

Megfigyelhető, hogy az utolsó oszlop elemei rendre 1-gyel egyenlők, vagyis a$\left(p \wedge (p \rightarrow q)\right) \rightarrow q$ összefüggés igaz, a p és q kijelenések bármely értékére, így az összefüggés tautológia volta bizonyított.

2) Bizonyítsuk be: $(p \rightarrow q) \equiv (\neg p) \rightarrow (\neg q)$
Megoldás: Be kell bizonyítsuk, hogy a $p \rightarrow q$ ugyanaz mint a $(\neg q) \rightarrow (\neg p)$ kifejezés. Elkészítjük a megfelelő logikai értéktáblázatot (6. táblázat):

6. táblázat

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \rightarrow q$	$(\neg q) \rightarrow (\neg p)$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

Megfigyelhető, hogy az utolsó két oszlop elemei egyenlők, vagyis $p \rightarrow q$ és $(\neg q) \rightarrow (\neg p)$ kifejezések azonosak, a p és q kijelenések bármely értékére, így az összefüggés bizonyított.

1.4 LOGIKAI ALAPELVEK (TÖRVÉNYEK)

1) Az azonosság elve („*principium identitatis*”): a dolgok neve egyértelmű kell, hogy legyen, egy-egy megnevezést minden esetben ugyanazon dolog megnevezésére kell használni, más dolog megnevezésére az már nem használható.
2) A kétszeres tagadás elve: $\neg(\neg p) \equiv p$
3) A kizárt harmadik elvének első megfogalmazója *Arisztotelész* szerint „*mindent vagy állítani, vagy tagadni kell*”. Logikai operátorokkal a következőképpen fogalmazzuk meg: $\neg p \vee p \equiv 1$.
4) Az ellentmondás mentesség elve szerint egy kijelentés nem lehet egyszerre igaz és hamis: $\neg p \wedge p \equiv 0$.
5) „*reductio ad absurdum*”- az abszurdra való visszavezetés elve. Egy igen erős és gyakran használt bizonyítási technika. Tegyük fel, hogy a $p \to q$ akarjuk bizonyítani. Ekkor feltételezzük, hogy q nem igaz és $\neg q$ igaz. A $\neg q$-ből igaz kijelentések lépésről lépésre való megfogalmazásával ellentmondásba kerülünk p –vel vagy egy más axiomával, törvénnyel. Az ellentmondásból következik, hogy $\neg q$ nem igaz, vagyis q igaz.

1.5 PREDIKÁTUMOK

Egy predikátum egy kijelentés, amely egy vagy több változótól függ. A változók számának függvényében beszélünk egyváltozós, kétváltozós, stb. predikátumokról. A predikátumokat összekapcsolhatjuk, ebben az esetben összetett predikátumokról beszélünk.

Példák:

a) p(x): „$x < 7$, $x \in \mathbb{N}$”
b) p(x,y): „ *x* osztója *y*-nak *x, y*$\in \mathbb{N}$”
c) p(x,y,z): „*x, y* és *z* egy derékszögű háromszög oldalhosszai, $x,y,z \in \mathbb{N}$”

Az egzisztenciális ($\exists$ - „*létezik*”) illetve az univerzális ($\forall$ - „*bármely*”) kvantorok a predikátumokat kijelentésekké transzformálják. Az egzisztenciális kvantor alkalmazásával a következő kijelentést kapjuk: $(\exists)x: p(x),\ x \in \mathbb{E}$, amit a következőképpen olvasunk: „ *létezik egy x elem az* $\mathbb{E}$ *halmazból, amelyre p(x)*”.

Az univerzális kvantor alkalmazásával a következő kijelentést kapjuk: $(\forall)x: p(x),\ x \in \mathbb{E}$, amit a következőképpen olvasunk: „*az E halmaz bármely x eleme esetében p(x)*”.

Példák:

a) $\exists\ (x,y): (x+1)(y+1) = 3,\ x, y \in \mathbb{R}$
b) $(\forall\ x): x^2 + 1 > 0\ x \in \mathbb{R}$

Az egzisztenciális és univerzális kvantorok negációja a következőképpen alakul:

- $\neg(\ \exists x\ p(x), x \in \mathbb{E}) \equiv (\forall)x\ \neg p(x),\ x \in \mathbb{E}$
- $\neg(\ (\forall)x\ p(x), x \in \mathbb{E}) \equiv (\exists)x\ \neg p(x),\ x \in \mathbb{E}$

Megfigyelhető, hogy az egzisztenciális kvantort a negáció az univerzális kvantorba transzformálja, és viszont: az univerzális kvantor negációjának az eredménye az egzisztenciális kvantor. A negáció során a predikátum a saját tagadásába transzformálódik.

Tétel

Egy tételt általában egy implikáció formájában írhatunk fel: „*ha p akkor q*”. A tétel fordítottja esetünkben a : „*ha q akkor p*”, ellentettje: „*ha ¬p akkor ¬q*”, illetve az ellentett fordítottja: „*ha ¬q akkor ¬p*”.

1.6 MEGOLDOTT FELADATOK

1) Anna, Balázs, Csaba és Dóra közül valaki betört egy ablakot. Kérdésünkre, hogy kitette, a következő válaszok érkeztek:
   - Anna: *Csaba volt*.
   - Balázs: *Nem én voltam*.
   - Csaba: *Balázs volt*.
   - Dóra: *Csaba hazudik*.

a) Ki volt a tettes, ha *egy gyerek mondott igazat*?

Megoldás:

a) Tekintsük a következő táblázatot, amelyben rögzítettük az összes lehetséges esetet (7. táblázat):

7. táblázat

Gyerek	**1. eset**	**2. eset**	**3. eset**	**4. eset**
Anna	1	0	**0**	0
Balázs	0	1	**0**	0
Csaba	0	0	**1**	0
Dóra	0	0	**0**	1

Az egyes esetek leírásakor 1-gyel jelöltük azt, ha valaki igazat mondott, 0-val ha nem mondott igazat. Sorra vesszük az egyes oszlopokat, az egyes eseteket, és keressük azt az esetet, amely ellentmondásmentes, miközben a hamis állításokat tagadással, „*nem igaz hogy..*” , igazzá tesszük.

Tekintsük az első esetet, amelyben Anna mond igazat. Mivel a többi gyerek hazudik, így az ő állításukat *tagadjuk*, így kapjuk meg az eredeti állításukat.

Anna: *Csaba volt*.
Balázs: *Nem igaz, hogy nem én voltam, azaz én – Balázs! - voltam*.

Az első eset vizsgálatában tovább már nem is érdemes kutatni, mivel amennyiben „*Csaba volt*” és „*Balázs volt*“ rendre igaz, akkor ez már ellentmondás. Tekintsük a második esetet, és járjunk el hasonlóan. A következőket kapjuk:

Anna: *Nem igaz, hogy Csaba volt.*
Balázs: *Nem én voltam.*
Csaba: *Nem igaz, hogy Balázs volt.*
Dóra: *Nem igaz, hogy Csaba hazudik*, azaz Csaba nem hazudik, akkor viszont Csaba és Dóra állításai ellentmondanak egymásnak.

Tekintsük a harmadik esetet, és járjunk el, mint fentebb:
Anna: *Nem igaz, hogy Csaba volt*.
Balázs: *Nem igaz, hogy nem én voltam* – azaz Balázs a tettes.
Csaba: *Balázs volt*- és Csaba igazat mond.
Dóra: *Nem igaz, hogy Csaba hazudik*, azaz Csaba nem hazudik.

A fenti állítássorozatot vizsgálva megállapítjuk, hogy az ellentmondásmentes, tehát biztosan kijelenthetjük, hogy Balázs a tettes!

b) Ki volt a tettes, ha *egy gyerek nem mondott igazat*?
Megoldás:
Tekintsük a következő táblázatot, amelyben rögzítettük az összes lehetséges esetet (8. táblázat):

8. táblázat

Gyerek	**1. eset**	**2. eset**	**3. eset**	**4. eset**
Anna	0	1	**1**	1
Balázs	1	0	**1**	1
Csaba	1	1	**0**	1
Dóra	1	1	**1**	0

Az első eset állításait figyelembe véve, a kijelentés sorozat a következőképpen alakul:

- Anna: *Nem igaz, hogy Csaba volt.*
- Balázs: *Nem én voltam*.
- Csaba: *Balázs volt*.

Megfigyeljük, hogy ellentmondás állt elő, amennyiben Balázs és Csaba is igazat mondtak. Kecsegtetőnek látszik a harmadik eset vizsgálata, amikor Csaba nem mond igazat:

- Anna: *Csaba volt*.
- Balázs: *Nem én voltam*.
- Csaba: *Nem igaz, hogy Balázs volt*. Így néz ki Csaba állításának a tagadása
- Dóra: *Csaba hazudik*

Az állítássorozatot végigolvasva, azonnal belátható, hogy Csaba volt a tettes

2) Hárman beszélgetnek: A, B és C.
   - A azt mondja: *B hazudik.*
   - B azt mondja: *C hazudik.*
   - C azt mondja: *A és B hazudik*

   A megoldást a 9. táblázat szemlélteti

9. táblázat

Gyerek	**1. eset**	**2. eset**	**3. eset**
A	1	0	**0**
B	0	1	**0**
C	0	0	**1**

Az első eset ellentmondáshoz vezet, mivel amennyiben elfogadjuk, hogy B állítása nem igaz, akkor B állításának a tagadása az igaz: *Nem igaz, hogy C nem hazudik*, azaz *C igazat mond*. Ebben az esetben viszont A és C állítása vezet ellentmondáshoz. A második eset nem vezet ellentmondáshoz, hiszen A állításának tagadása az, hogy *nem igaz, hogy B hazudik*, azaz B igazat mond, továbbá C állítása is hazugság, aminek tagadása: *nem igaz, hogy A és B hazudik*, tehát közülük egyik biztosan nem hazudik, és ez B!

3) Tudjuk, hogy szereplőink a hazugok vagy az igazmondók szektájához tartoznak. Minden esetben el kell dönteni, ki melyik szektához tartozik.

- Egy szobában ketten vannak : A és B. A azt mondja: „*Legalább egyikünk hazug*”

10. táblázat

Személy	**1. eset**	**2. eset**	**3. eset**	**4. eset**
A	1	0	0	1
B	0	1	0	1

Megoldás: Az első eset (10. táblázat) ellentmondásmentes: A igazat mond, B hazudik

- Egy szobában ketten vannak : A és B. A azt mondja: „*én hazug vagyok, de B nem az*”
Megoldás: Az első eset ellentmondáshoz vezet, hiszen egy igazmondó nem mondhatja magáról, hogy hazug (10. táblázat). A második eset is ellentmondásos, hiszen amennyiben A hazug, akkor neki minden állítása hazug, így nem állíthatja azt a valós tényt, hogy B igazmondó. Egyetlen ellentmondásmentes eset a harmadik, amikor mindketten a hazugok szektájához tartoznak

- Egy szobában hárman vannak A, B és C. A következők hangzanak el:
A: „*Mindhárman hazugok vagyunk*”
B: „*Pontosan egy igaz van közöttünk*”
Megoldás: természetesen az első és negyedik eset ellentmondáshoz vezet, hiszen A nem mondhat igazat. Ugyanígy a harmadik eset is ellentmondáshoz vezet, hiszen amennyiben tagadjuk B állítását, akkor azt kapjuk, hogy „*nem igaz, hogy pontosan egy hazug van közöttünk”*, tehát két vagy három hazug van közöttük. Három hazug nem lehet, hiszen azt A pontosan ezt állította, és A hazudott. Két hazug sem lehet a harmadik eset szerint, hiszen akkor B igazat mond, holott ő is hazudik. Az egyetlen ellentmondásmentes eset a második eset, ez szerint A és C hazug, B igazat mond.

4) Négy lány futóversenyen vett részt. A verseny után mindegyiket megkérdezték, melyik helyen végzett. A következő válaszokat kaptuk:
Anna: „*Nem lettem sem első sem utolsó*”
Bella: „*Nem lettem első*”
Csilla: „*Első lettem*”
Dóra: „*Én lettem az utolsó*”
Valaki, aki látta versenyt megállapítja, hogy a négy válasz közül pontosan egy hamis. Ki mondott valótlant? Ki volt az első? Ki volt az utolsó?

Megoldás:

11. táblázat

Gyerek	1. eset	2. eset	3. eset	4. eset
Anna	1	1	1	0
Bella	1	1	0	1
Csilla	1	0	1	1
Dóra	0	1	1	1

Szerencsénk van, mert az első lehetséges eset már ellentmondásmentes! Ezek szerint Csilla lett az első, Dóra nem mondott igazat, így ő biztosan nem lehet az utolsó, Bella állításából pedig arra következtetünk, hogy ő lett az utolsó, hiszen Anna nem lehet sem első, sem utolsó és igazat mond. Esetünkben két lehetséges sorrend is megvalósulhatott:

- Csilla, Anna, Dóra, Bella, vagy
- Csilla, Dóra Anna, Bella.

5) Egy papíron az alábbi állítások olvashatók:
   a) *Ezen a papíron legfeljebb 1 állítás igaz.*
   b) *Ezen a papíron legfeljebb 2 állítás igaz.*
   c) *Ezen a papíron legfeljebb 3 állítás igaz.*
   d) *Ezen a papíron legfeljebb 4 állítás igaz.*
   e) *Ezen a papíron legfeljebb 5 állítás igaz.*

   Hány állítás igaz?

   Megoldás: értelmezzük az állítást: az a) állítás szerint egyetlen állítás sem igaz a papíron esetleg egy állítás igaz. Viszont így a további állítások is igazak, hiszen *a legfeljebb 3 állítás igaz*, jelentheti a 0, 1, 2 vagy 3 állítás igazságát is! Észrevesszük, hogy egy adott állítás előtt minden állítás hamis, illetve mögötte minden állítás igaz. Így a c) állítástól kezdődően minden állítás igaz, tehát a c), d) és e) állítások igazak!

6) Legyen *p, q, r* logikai változó. Jelöljük 1-gyel illetve 0-val az igaz illetve hamis logikai értéket. Oldjuk meg *p, q, r*-re a következő egyenleteket:
   a) $(p \vee q) \wedge r = 1$

   Megoldás:

12. táblázat

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{p \vee q}$	$\boldsymbol{(p \vee q) \wedge r}$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

A (0, 1, 1), (1, 0, 1) és (1, 1, 1) hármasok az a) egyenlet megoldásai!

   b) $(p \wedge q) \rightarrow r = 0$

   Megoldás:

13. táblázat

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{(p \wedge q)}$	$\boldsymbol{(p \wedge q) \rightarrow r}$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

A (0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 1) hármasok kielégítik a b) egyenletet!

1.7 KITŰZÖTT FELADATOK

1) Készítsük el az alábbi kijelentések logikai értéktáblázatát:
   a) $\neg(\neg p)\vee\neg(\neg q)$;
   b) $p\wedge(q\vee r)$;
   c) $p\wedge(\neg q\vee\neg r)$

2) Vizsgáljuk meg, hogy a következő kijelentések tautológiák-e?
   a) $p\vee\neg p$;
   b) $\neg(p\vee\neg p)$
   c) $\big((p \rightarrow q)\wedge(q \rightarrow r)\big) \rightarrow q$
   d) $p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$ a leválasztási elv, „*modus ponens*”.

   Megjegyzés: A *modus ponens* latinul annyit tesz, hogy tételező mód. Ez a legalapvetőbb következtetési séma. A *modus ponens* esetében az állításból és annak előtagjából arra következtetünk, hogy az utótag is helyes. Például: „*ha sokat olvasok, akkor fáj a szemem*” állítás és az „*sokat olvasok*” állítások következtetése az, hogy „*fáj a szemem*”. Megjegyezzük, hogy a második állítást a következtetéssel nem cserélhetjük fel: a „*ha sokat olvasok, akkor fáj a szemem*” és „*fáj a szemem*” kijelentésekből nem következik feltétlenül, hogy „*sokat olvasok*”.

3) Vizsgáljuk meg, hogy a következő kifejezések egyenértékűek-e?
   b) $p \rightarrow q \equiv \neg\big(p\wedge(\neg q)\big)$
   c) $p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p$

4) Vizsgáljuk meg a következő egyenletek igazságértékét
   a) $\neg(p\wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
   b) $\neg(p\vee q) \equiv \neg p\wedge\neg q$ (*de Morgan* törvényei)

5) Anna, Béla és Cili szétosztanak 9 golyót úgy, hogy mindegyikük különböző számú golyót kap, és mindenki legalább egyet. Az őket kérdező Beának a következőket mondják:
   Anna: *Nálam legfeljebb 5 golyó van*.
   Béla: *Annánál van a legtöbb golyó*.
   Cili: *Béla hazudik.*
   Kinél van a legtöbb golyó és mennyi, ha tudjuk, hogy hármójuk közül pontosan egy gyerek hazudott?

6) Egy papíron az alábbi 4 állítást olvashatjuk:
   a) Ezen a papíron pontosan 1 állítás hamis.
   b) Ezen a papíron pontosan 2 állítás hamis.
   c) Ezen a papíron pontosan 3 állítás hamis.
   d) Ezen a papíron pontosan 4 állítás hamis.
   Hány állítás igaz a papíron?

7) Az alábbiak közül melyik a *Nincs olyan gyerek, aki nem szereti a csokoládét* állítás tagadása?
   e) Nincs olyan gyerek, aki szereti a csokoládét
   f) Minden gyerek szereti a csokoládét
   g) Néhány gyerek szereti a csokoládét.
   h) Van olyan gyerek, aki szereti a csokoládét.
   i) *Van olyan gyerek, aki nem szereti a csokoládét*

8) Öt gyerek a következőket állítja egymásról:
   j) András: *A fiútestvérem teniszezik.*
   k) Bea: *Pontosan két testvérem van.*
   l) Csaba: *Nincs fiútestvérem.*
   m) Dóra: *Fiútestvérem hegedül.*
   n) Erik: A *leánytestvérem szereti a matematikát.*

Ki lehet Csaba testvére, ha mindenki igazat mondott?

9) Kati, Mari és Zsuzsi pólót visel, de mindegyik más színűt: pirosat, fehéret illetve zöldet. Milyen színű Kati és Mari pólója, ha:
   o) Kati pólója nem fehér
   p) Mari pólója fehér vagy zöld
   q) Zsuzsi pólója se nem piros, se nem zöld.

10) Farslandia lakosainak száma 1998. A lakosság egy része igazmondó, a többi hazudós. Az országban három felekezet van: a Napimádók, a Földimádók és a Holdimádók. Minden lakos pontosan egy felekezethez tartozik. Egy országos felmérés alkalmával minden lakosnak válaszolnia kellett a következő három kérdés mindegyikére:
   a) Te Napimádó vagy? IGEN NEM
   b) Te Földimádó vagy? IGEN NEM
   c) Te Holdimádó vagy? IGEN NEM

   Az első kérdésre 999, a másodikra 777, a harmadikra 555 IGEN válasz érkezett. Hány hazudós lakosa van Farslandiának?

11) A Seholsincs-szigeten kétféle ember él: igazmondó és hazudós. Az igazmondók mindig igazat mondanak, a hazudósak mindig hazudnak. Egy alkalommal megkérdeztünk öt embert, akik ismerték egymást, hogy: „*Hány igazmondó van köztetek?*" . A következő választ kaptuk: 0, 1, 2, 3, 4. Hány igazmondó volt az öt ember között?

12) Csám Borgó, Csen Cselő, Csin Talan és Cson Kagúla négy jómadár bajba keveredtek: rablással gyanúsítják őket. Hárman ebben az ügyben ártatlanok, egy valaki közülük bűnös. Kihallgatásukkor a következőket mondták:
   a) Csám Borgó: Csin Talan nem rabló.
   b) Csen Cselő: Csin vagy Cson a rabló.
   c) Csin Talan: Cson Kagúla ártatlan.
   d) Cson Kagúla: Csám vagy Csem a rabló

   Tudjuk, hogy az ártatlanok minden állítása igaz. Derítsd ki, hogy ki a bűnös!

13) Ellenőrizd a következő azonosságokat:
   e) $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$

f) $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$
g) $p \wedge q = \neg(\neg p \vee \neg q)$

14) Igazoljuk a következő azonosságokat:
a) $p \leftrightarrow q = \neg p \vee q$
b) $p \leftrightarrow q = (p \longrightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

15) Legyen *p, q, r* logikai változó. Jelöljük 1-gyel illetve 0-val az igaz, illetve hamis logikai értéket. Oldjuk meg *p, q, r*-re a következő egyenleteket:
a) $(p \wedge q) \leftrightarrow (p \wedge r) = 1$
b) $[(p \wedge 1) \vee (p \wedge 0)] \leftrightarrow (q \wedge r) = 0$

2. HALMAZOK

A halmaz a jelenkori matematika legalapvetőbb fogalma. A halmazt elemeinek összessége alkotja. Észrevehető, hogy az előbbi mondat csak leírja a halmazt, de nem definiálja azt. A halmazt elsődleges fogalomnak tekintjük, így azt más fogalmakkal nem definiáljuk. A halmazt egyes szerzők sokaságnak is nevezik.

Említettük már, hogy a halmazt az elemeinek összessége alkotja. Egy objektum hozzátartozhat, vagy nem tartozhat hozzá a halmazhoz, aszerint, hogy eleme-e a halmaznak vagy nem. A halmazhoz való tartozást is alapfogalomnak tekintjük. A halmazt ismertnek, adottnak tekintjük, ha a vele kapcsolatban bármely dologról egyértelműen eldönthető, hogy eleme-e a halmaznak vagy sem. A halmazokat nagybetűkkel jelöljük: *A, B, C…* elemeit pedig kisbetűkkel. Amennyiben *a* az A halmaz eleme, akkor ezt a következőképpen jelöljük: $a \in A$ ("*a* eleme *A*-nak"), ellenkező esetben pedig a következő jelölést használjuk: $a \notin A$ ("*a* nem eleme *A*-nak").

A halmaz elemeit felsorolással adhatjuk meg, vagy pedig analitikusan, egy törvény segítségével:

A = {1, 2, 3, 4, 5, 6},

B={x| x+1≤10, x∈ ℕ}.

A B halmazt elemei felsorolásával is felírhatjuk: B = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.

A halmazok között van egy, amelynek egyetlen eleme sincs. Ez a halmaz az üres halmaz, amelynek jelölése: ∅.

A következőkben tekintsünk két halmazt, A-t és B-t. Az A halmazt B *részhalmazának* tekintjük, ha A minden eleme egyúttal B-nek is eleme. Azt, hogy A részhalmaza B-nek a következőképpen jelöljük: $A \subset B$ ("A része B-nek"). Természetesen minden halmaz része önmagának, azaz $A \subset A$. Az A halmazt B *valódi részhalmazának* tekintjük, ha $A \subset B$, de B-nek van olyan eleme, amely nem eleme A-nak.

Megjegyezzük, hogy egy *A* halmaz elemeinek számát a halmaz számosságának nevezzük és *card*(A)-val vagy |A|-val jelöljük. A halmaz számosságának nagy szerepe van a számfogalom bevezetésében.

2.1 MŰVELETEK HALMAZOKKAL

a) **Definíció**: *Az A és B halmaz egyesítése,(A ∪ B), nyomán keletkező halmaz olyan elemeket tartalmaz, amelyek A-nak vagy B-nek elemei*. Analitikusan:

$$A \cup B = (x|\, x \in A \vee\ x \in\ B).$$

b) **Definíció**: *Az A és B halmaz metszete, (A ∩ B) , során keletkező halmaz olyan elemeket tartalmaz, amelyek A-nak és B-nek is elemei*. Analitikusan:

$$A \cap B = (x|\, x \in A \wedge\ x \in\ B)$$

Megjegyzés: *két halmaz diszjunkt, ha* $A \cap B = \emptyset$

c) **Definíció**: *Az A és B halmaz különbsége (A/B) során keletkező halmaz olyan elemeket tartalmaz, amelyek elemei A-nak, de nem elemei B-nek*. Analitikusan:

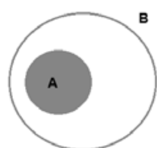
$$A\ \setminus B = (x|\, x \in A \wedge\ x \notin\ B)$$

d) **Definíció**: *Az A és B halmazok egyenlők, ha A ⊂ B és B ⊂ A, azaz A bármely eleme a B halmaz eleme is, és fordítva: B halmaz minden eleme az A halmaz eleme is egyben.*

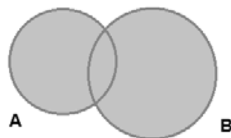
Megjegyzés: használjuk az ⊆ operátort is a részhalmaz jelölésére. Ebben az esetben a részhalmaz egyenlő is lehet a befogadó halmazzal. A ⊂ használatakor elfogadott az, hogy a befogadó halmaznak vannak elemei, amelyek nem találhatók meg a részhalmazban.

e) **Definíció**: *Ha B⊆A akkor az A \ B halmazt a B halmaz A-ra vonatkoztatott* komplementer halmazának *nevezzük. Jelölése:* $C_A(B)$.

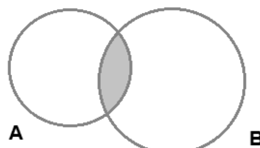
f) **Definíció:** *ha* $A \cap B = \emptyset$ *akkor az A és B halmazokat diszjunkt halmazoknak nevezzük*



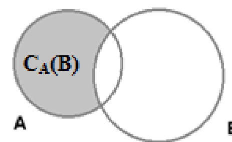
A halmaz a *B* halmaz valódi részhalmaza: $A \subset B$



Az A és B halmazok egyesítése: $A \cup B$



Az A és B halmazok metszete: $A \cap B$



Az A és B halmazok különbsége: A / B

Megoldott feladatok

1. Tudju, hogy
   a. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$;
   b. $A \cap B = \{1, 5, 6, 7\}$
   c. $A \setminus B = \{2, 3, 4\}$

Határozzuk meg az A és B halmazokat.

Megoldás: Mivel $A \cap B = \{1, 5, 6, 7\}$, így {1,5,6,7}⊂ A és {1,5,6,7}⊂ B, továbbá az $A \setminus B = \{2, 3, 4\}$ -ből következik, hogy ezek az elemek csak az A halmaznak az elemei, így tudjuk azt, hogy {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}⊆ A. A két halmaz egyesítéséből már csak a 8 hiányzik, így az eredetileg a B halmaz eleme kell, hogy legyen, azaz 8 ∈ B, így {1, 5, 6, 7, 8}⊆ B. Következésképpen A = {1, 2, 3, 4, 5, 6 ,7 } és B = {1, 5, 6, 7, 8}.□

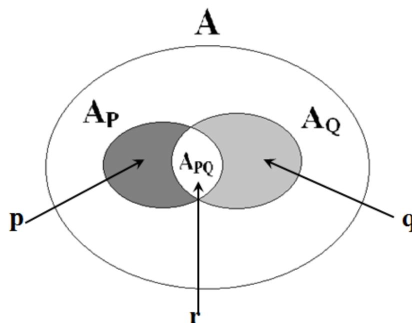
2.2 A LOGIKAI SZITA – SZITAKÉPLET

Adott egy *n* elemű *A* halmaz, *card(*A*)* = *n*, melynek elemeiről tudjuk, hogy:

- *p* darab *P* tulajdonságú eleme van (például: 2-vel osztható számok),
- *q* darab *Q* tulajdonságú eleme van (például: 3-mal osztható számok),
- *r* darab *P* **és** *Q* tulajdonságú eleme van. (például 2-vel **és** 3-mal osztható számok)

Megjegyzés: a *P* **és** *Q* tulajdonságú elemeket természetesen beszámítjuk a *P* tulajdonságúak közé, de a *Q* tulajdonságúak közé is!

Jelöljük a *P* tulajdonságú elemek részhalmazát $\boldsymbol{A_P}$-vel, ekkor p=*card*(A_P), a *Q* tulajdonságú elemek halmazát $\boldsymbol{A_Q}$-val, ekkor q=*card*(A_Q) továbbá a *P* és *Q* tulajdonságú elemek részhalmazát A_{PQ}-val, ekkor *r=card(*$\boldsymbol{A_{PQ}}$*)*. A leírtakat az ábra szemlélteti:



Az A halmaz elemeinek a száma pontosan az $A_P \cup A_Q$ halmaz elemeinek a száma, azaz *card(*A_P*)+card(*A_Q*)-card(*A_{PQ}*)*. Ha a *card(*A_{PQ}*)*-t nem vonnánk ki, akkor a *P* és *Q* tulajdonságú elemeket kétszer számítanánk. Tehát:

$$card(A_P \cup A_Q) = card(A_P)+card(A_Q)-card(A_{PQ}) = card(A_P)+card(A_Q) - card(A_P \cap A_Q).$$

Más jelölést használva:

$$|A_P \cup A_Q| = |A_P| + |A_Q| - |A_{PQ}| = |A_P| + |A_Q| - |A_P \cap A_Q|.$$

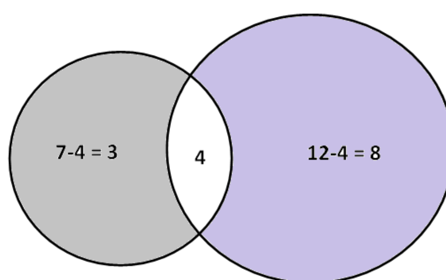
A fenti képlet a logikai szita formula két tulajdonság esetére.

1) *Megoldott feladat*: Egy 32-es létszámú osztályban év végén hét tanulónak volt tízese matematikából, 12 tanulónak pedig történelemből, négyen mindkét tárgyból tízest kaptak. Hány tanuló van az osztályban, akinek sem matematikából sem történelemből nem volt tízese.

   Megoldás: jelöljük a matematikából tízessel végző diákok halmazát M-el, a történelemből jeleskedők halmazát T-vel. Belátható, hogy a T halmazban van olyan diák, akinek matematikából is tízese van és viszont. Ezen diákok halmazát jelöljük $M \cap T$-vel. A feladat szövegéből kiderül, hogy $|M|=7$, $|T| =12$, $|M\cap T|=4$. Ekkor:

$$|M \cup T| = |M|+|T|- |M \cap T|.$$

   Behelyettesítve az ismert értékeket, azt kapjuk, hogy $|M\cup T|=7 + 12 - 4 = 15$. Figyelembe véve, hogy az osztály összlétszáma 32, megállapítjuk, hogy $32 - 15 = 17$ tanulónak sem matematikából sem történelemből nem volt tízese.



   Az ábra alapján $7 - 4 = 3$ tanulónak csak matematikából van tízese, 4 tanulónak mindkét tantárgyból van tízese, $12 - 4 = 8$ tanulónak történelemből van tízese. Tehát $3 + 4 + 8 = 15$ tanuló történelem illetve matematika jegyeiről tudjuk, hogy azok tízesek. Következésképpen 32 – 15 – 17 tanulónak sem matematikából sem történelemből nincs tízese.

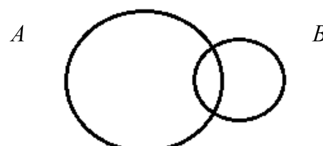
2) *Megoldott feladat*: milyen értékek között váltakozhat egy 25 elemű halmaz és egy 17 elemű halmaz uniójának számossága?

   Megoldás:



$A \cap B = \emptyset$.

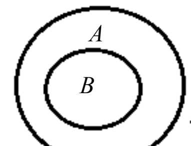
$|A \cup B| = 25+17 = 42$



$A \cap B \neq \emptyset$

$A \not\subset B$

$25 \leq |A \cup B| \leq 42$



$A \subset B$

$|A \cup B| = 25$

Az ábrákból kiolvasható, hogy $|A \cup B| \in [25, 42]$.

A logikai szita formulát *három tulajdonság esetére* csak kijelentjük, de nem bizonyítjuk:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A \cap B \cap C|$$

3) *Megoldott feladat*: Egy egyetem 500 hallgatója közül 300 olvas németül, 200 olvas angolul, 50 olvas franciául. 20 olvas németül és franciául, 30 olvas angolul és franciául, 20 olvas németül és angolul, 10 olvas mindhárom nyelven. Hányan olvasnak legalább egy nyelven? Hányan vannak olyanok, akik egyetlen nyelven sem olvasnak

Megoldás: Angolul beszélők halmaza: A, németül beszélők halmaza: N, franciául beszélők halmaza: F, angolul és franciául beszélők halmaza: A∩F, angolul és németül beszélők halmaza: A∩N, franciául és németül beszélők halmaza: N∩F, angolul, németül és franciául beszélők halmaza: A∩F∩N. Alkalmazzuk három tulajdonságra a szita formulát:

$$|A \cup F \cup N| = |A| + |F| + |N| - (|A \cap F| + |A \cap N| + |N \cap F|) + |A \cap F \cap N|$$

Következik:

$|A \cup F \cup N|$ = 300 + 200 + 50 - (20 + 30 + 20) + 10=550 – 70 + 10 = 490

Tehát 490 diák olvas legalább egy nyelven, illetve 500 – 490 = 10 diák egyetlen nyelven sem olvas a megadottak közül.

2.3 HALMAZMŰVELETEK TULAJDONSÁGAI

Tekintsük az A, B és *C* tetszőleges halmazokat. Ekkor:

$A \cup \emptyset = A$ $\qquad$ $A \cap \emptyset = A$

$\emptyset \subset A$ $\qquad$ (az üres halmaz bármely halmaznak részhalmaza)

$A \cup A = A$ $\qquad$ $A \cap A = A$ $\qquad$ (idempotencia)

$A \cup B = B \cup A$ $\qquad$ $A \cap B = B \cap A$ $\qquad$ (kommutativitás)

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $\qquad$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ $\qquad$ (asszociativitás)

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $\qquad$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $\qquad$ (disztributivitás)

$A \subseteq A$ $\qquad$ (minden halmaz önmagának részhalmaza)

2.4 HALMAZOK DESCARTES-FÉLE SZORZATA

Definíció: *Legyen A és B két (nem üres) halmaz. Az* $A \times B$ *szimbólummal jelöljük az A és B halmazok Descartes -féle szorzatának halmaza. Az* $A \times B$ *halmaz elemeit a következőképpen írjuk le:*

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Tehát az $A \times B$ halmaz elemei mindazok az (*a,b*) rendezett párok. Egy ilyen rendezett pár első tagja az A halmaznak, második tagja pedig a B halmaznak az eleme. Az A halmaz a szorzat első tényezője, a B halmaz a szorzat második tényezője

Példa: Legyen A = {1,2,3} és B = {0,6}. Ebben az esetben

$$A \times B = \{(1,0), (1,6), (2,0), (2,6), (3,0), (3,6)\}.$$

2.5 KITŰZÖTT FELADATOK

1) Határozzuk meg az X és Y halmazokat, ha az alábbi egyenlőségek igazak:
   a) $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;
   b) $X \cap Y = \{4, 6, 9\}$;
   c) $X \cup \{3, 4, 5\} = \{1, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$;
   d) $Y \cup \{2, 4, 8\} = \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

2) Határozzuk meg az A és B halmazokat, ha az alábbi egyenlőségek igazak:
   a) $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$;
   b) $A \cap B = \{1, 2\}$;
   c) $A \setminus B = \{5\}$.

3) Határozzuk meg az A és B halmazokat, ha az alábbi egyenlőségek igazak:
   a) $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$;
   b) $A \cap B = \{a, b\}$;
   c) $A \setminus B = \{c, d\}$.

4) Határozzuk meg az E halmazt és annak A és B részhalmazait, ha tudjuk, hogy:
   a) $C_E A = \{2, 5, 9, 12, 18, 20\}$;
   b) $C_E B = \{2, 6, 18, 20\}$;
   c) $A \cup B = \{1, 5, 6, 9, 13, 14\}$.

5) Határozzuk meg az A és B halmazokat, ha egyszerre teljesülnek a következő feltételek:
   a) $A \cup B = \{4, 5, 6, 7, 8, 10\}$;
   b) $A \cap B = \{6, 7, 10\}$;
   c) $|A \setminus B| = 1$;
   d) $|B|$ egy páratlan szám.

6) Határozzuk meg az A és B halmazokat, ha egyszerre teljesülnek a következő feltételek:
   a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
   b) $A \cap B = \{3, 4\}$;
   c) $|A \setminus B| = |B \setminus A|$;
   d) Az A halmaz elmei egymás után következő számok.

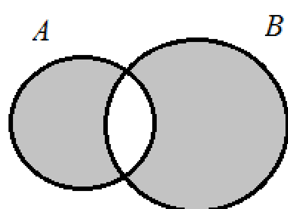
7) Határozzuk meg az A és B halmazokat, ha egyszerre teljesülnek a következő feltételek:
   a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
   b) $A \cap B = \{5, 6, 7\}$;
   c) $B \setminus A = \{2, 3, 4\}$

8) Határozzuk meg az A és B halmazokat, ha egyszerre teljesülnek a következő feltételek:
   a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
   b) $A \setminus B \cup B \setminus A = \{1, 4, 5, 6\}$;
   c) $1 \in A$
   d) $\{3,4\} \not\subset A$

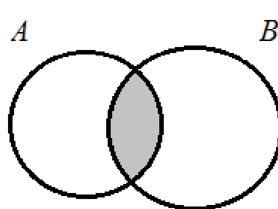
9) Határozzuk meg az A és B halmazokat, ha egyszerre teljesülnek a következő feltételek:
   a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$;
   b) $card(A) = card(B)$;
   c) $x \in A \Rightarrow x + 1 \in B$;

10) Határozzuk meg az A és B halmazokat, ha egyszerre teljesülnek a következő feltételek:
   a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
   b) $A \setminus (A \cap B) = \{6\}$;
   c) $B \setminus (B \cap A) = \{1,3\}$

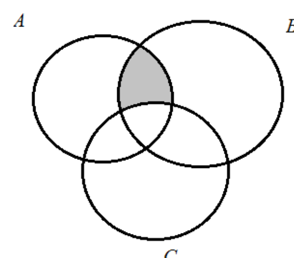
11) Írjuk fel azt a műveletsort, amelynek eredménye az alábbi Venn-Euler diagramok besötétített halmaza:



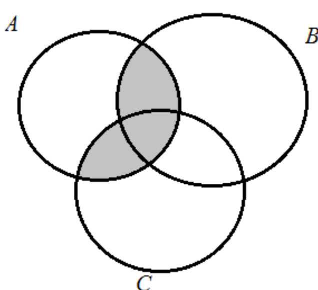
a)



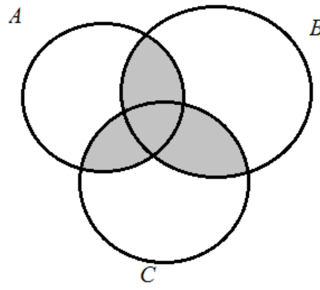
b)



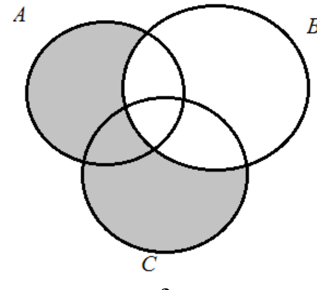
c)



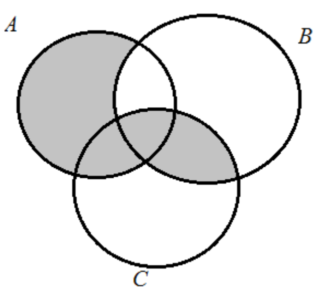
d)



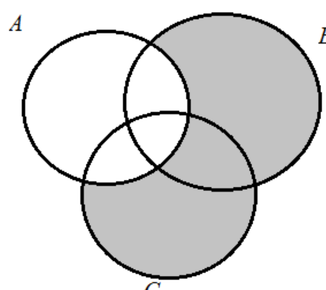
e)



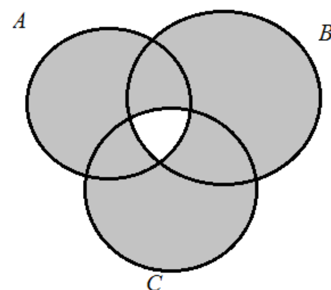
f)



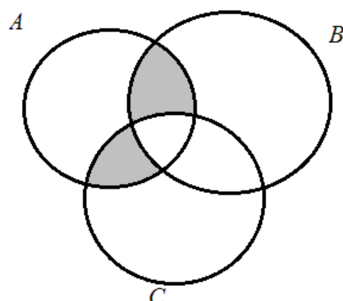
g)



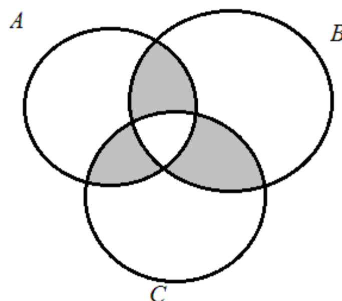
h)



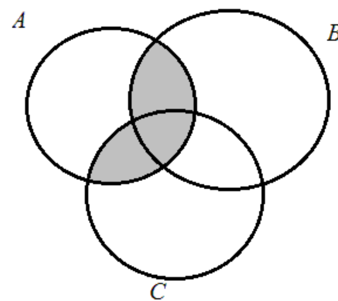
i)



j)



k)



l)

Például az i) esetben a megoldás: $(A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C)$

12) Adott az $M = \{\overline{ab} | \overline{ab} \in \mathbb{N}, a < b\}$ halmaz. Adjuk meg $|M|$-t.

13) Adott az $N = \{\overline{ab} | \overline{ab} \in \mathbb{N}, a \geq b\}$ halmaz. Adjuk meg $|N|$-t.

14) Hány eleme van az $A \cup B$ halmaznak, ha $|A| = 8, |B| = 9,$ és$|A \cap B| = 5.$

15) Adottak az A és B halmazok. Tudjuk, hogy $|A| = 20, |B| = 15.$ Határozzuk meg $|A \cap B|$-t, ha $|A \cup B| = 28.$

16) Adottak az A, B és C halmazok. Az ábrán bejelöltünk 7 tartományt. Határozzuk meg mely tartományból állnak az alábbi halmazok:
   a) $(A \cup B) \cup C$
   b) $(A \cap B) \cap C$
   c) $(A \setminus B) \setminus C$
   d) $(A \cup B) \cap C$
   e) $(B \cap C) \setminus A$
   f) $(B \setminus C) \cap A$
   g) $(A \cap C) \cup (B \cap C)$

17) Adott az A = {10, 20, 30} halmaz. Adjuk meg a B, C, D halmazokat, ha
   a) A ∪ B = {10, 20, 30, 40, 50}
   b) A ∩ B = {20}
   c) A\D = ∅

18) Határozzuk meg az A \ B és B \ A halmazokat, ha: A={a, b, c, d}, A ∪ B={a, b, c, d}, A ∩ B={a, c}.

19) Egy osztály létszáma 30. Az osztályban három nyelvet tanulnak: angolt, oroszt és franciát, minden diák legalább egy nyelvet tanul. Angolul 14-en tanulnak, oroszul 15-en, franciául pedig 5-en. Pontosan két nyelven hat diák tanul. Hányan tanulják mindhárom nyelvet?

20) Egy matematikaversenyen két feladatot tűztek ki. Az első feladatot az indulók 70%-a, a második feladatot az indulók 60%-a oldotta meg. Minden induló megoldott legalább egy feladatot, kilencen mindkét feladatot megoldották, Hányan indultak a versenyen?

21) Egy matematikaversenyen 3 feladatot tűztek ki. A 30 induló közül az első feladatot 19-en, a másodikat 15-en, a harmadikat 18-an oldották meg. Az első és második feladatot 7-en, a második és harmadik feladatot 10-en, az első és harmadik feladatot 9-en oldották meg helyesen. Mindhárom feladat megoldása 3 diáknak sikerült. Hányan nem tudtak egyetlen feladatot sem megoldani?

22) Egy 30 fős társaságban franciául 20-an. Németül 22-en, angolul 25-en beszélnek, Egy nyelvet mindenki beszél. Hányan beszélhetnek három nyelvet? Legalább hányan beszélhetnek két nyelvet?

23) A 45 tagú Majmok Tudományos Akadémiája ülést tartott. A gyűlésen a következő három napirendi kérdés volt megtárgyalva:
   a) Okosabb-e a majom, mint az ember?
   b) Szebb-e a majom, mint az ember?
   c) Igaz-e, hogy a majom az ember őse?

   Az első kérdésre 23-an , a második kérdésre 17-en, a harmadik kérdésre 23-an szavaztak igennel. Az első kérdésre igennel szavazók közül 13-an a második kérdésre nemmel feleltek, a második kérdésre igennel szavazók közül 12-en a harmadik kérdésre nemmel feleltek. Igent mondott a második és harmadik kérdésre 6 akadémikus, de közülük az első kérdésre nemmel szavaztak. Hányan szavaztak mindhárom kérdésre nemmel?

24) Az osztályban 38 tanuló van. Mindenki űzi a következő sportágak valamelyikét: atlétika, röplabda, úszás. 19-en atletizálnak, 21-en röplabdáznak, 12 tanuló úszik; 7 tanuló atletizál és röplabdázik, 6 tanuló atletizál és úszik, 3 tanuló röplabdázik és úszik. Hány tanuló űzi mindhárom sportot?

25) Egy 29 fős osztálynak három kérdést tettek fel, mindenki igennel vagy nemmel válaszolhatott. A szereted-e a matematikát kérdésre 22 igen, a szereted-e a fagyit kérdésre 18 igen, a szereted a palacsintát kérdésre 18 igen érkezett. Tudva azt, hogy azok közül, akik szeretik, a matematikát 7-en nem szeretik a fagyit és 8-an nem szeretik a palacsintát, valamint 12-en szeretik a fagyit és a palacsintát, de közülük 2 nem szereti a matematikát. Hányan mondtak nemet mindhárom kérdésre?

3. RELÁCIÓK

Az előző fejezetben ismertettük két halmaz Descartes-féle szorzatát. Ezt fogjuk felhasználni a reláció fogalmának bevezetésére.

Definíció: *Legyen A és B két halmaz és S az* $A \times B$ *halmaz egy részhalmaza:* $S \subset A \times B$. *Azt mondjuk, hogy az S az A és B elemei között (A és B sorrendben) egy ρ relációt értelmez a következőképen: ha* $a \in A$ *és* $b \in B$ *akkor a ρ b ("a ρ relációban van b-vel"), ha* $(a, b) \in S$. *Röviden:*

$$a\ \rho\ b \Leftrightarrow (a, b) \in S.$$

Az itt értelmezett relációt bináris relációnak nevezzük. A fejezetben, a továbbiakban csak bináris relációkkal foglalkozunk.

3.1 TULAJDONSÁGOK

Egy ρ bináris reláció :

1) **reflexív**, *ha tetszőleges* $a \in A$ *esetén* $a\ \rho\ a$
2) **tranzitív**, *ha az* $a, b, c \in A$ *esetén amennyiben* $a\ \rho\ b$ *és* $b\ \rho\ c$ *akkor* $a\ \rho\ c$. *Röviden:* $(a\ \rho\ b \land b\ \rho\ c) \Rightarrow a\ \rho\ c$
3) **szimmetrikus**, *ha* $a, b \in A$ *és* $a\ \rho\ b$, *akkor* $b\ \rho\ a$. *Röviden:* $a\ \rho\ b \Rightarrow b\ \rho\ a$
4) **antiszimmetrikus**, ha $a, b \in A$ *esetén amennyiben* $a\ \rho\ b$ *és* $b\ \rho\ a$, *akkor a=b. Röviden:* $(a\ \rho\ b \land b\ \rho\ a) \Rightarrow a = b$.

Definíció: *egy bináris reláció* **ekvivalenciareláció**, *ha reflexív, tranzitív és szimmetrikus.*

Definíció: *egy bináris reláció* **rendezési reláció**, *ha reflexív, tranzitív és antiszimmetrikus.*

példák:

1) Adottak az *A={2,3,5}* és *B = {1, 2, 3 ,4 ,5 ,6 ,7 ,8 ,9, 10}* halmazok. Legyen *S* azon (*a,b*) számpárok halmaza, amelyre $S \subset A \times B$, és amely számpárokat az „***a*** *osztója* **b**-*nek*" reláció kapcsolja össze. Ekkor S = {(*2,2*), (*2,4*), (*2,6*), (*2,8*), (*2,10*), (*3,3*), (*3,6*), (*3,9*), (*5,5*) (*5,10*)}.
2) Adottak az *A*={*2,4,5*} és *B = {1, 2, 3 ,4 ,5 ,6}* halmazok. Legyen *S* azon (*a,b*) számpárok halmaza, amelyre $S \subset A \times B, a \in A, b \in B$, és amely számpárokat az „***a*** *szigorúan kisebb mint* ***b***" reláció kapcsolja össze. Így S = {(*2,3*), (*2,4*), (*2,5*), (*2,6*), (*4,5*), (*4,6*), (*5,6*)}.
3) A természetes számok halmazán a ≤ „*kisebb vagy egyenlő*" reláció tranzitív, hiszen amennyiben ∀*a,b,c* ∈ ℕ esetében, ha *a≤ b és b ≤ c ⟹ a≤ c*
4) A természetes számok halmazán az "= egyenlő" reláció reflexív: ∀*a* ∈ ℕ ⟹ *a = a.*
5) Egy város lakosainak halmazán tekintsük a ρ : „*azonos hónapban született*" relációt. A ρ reláció szimmetrikus, hiszen ha *a* ρ *b,* azaz *a* és *b* azonos hónapban születtek, akkor fordítva is igaz: $b\ \rho\ a$.
6) A természetes számok halmazán a ≤ „kisebb *vagy egyenlő*" reláció antiszimmetrikus, ha ∀*a,b* ∈ ℕ *a* ≤ *b* és *b* ≤ *a*, akkor könnyen belátható, hogy a két reláció csak akkor teljesül egyszerre, ha *a=b*.

3.2 MEGOLDOTT FELADATOK

1) Adott az A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}, és az $A \times A$ Descartes-féle szorzat. Adjuk meg rendre az $S \subset A \times A$ részhalmazokat, amelyeket a következő relációk generálnak:
   a) *(a,b) ∈ S, ρ_1: “b kétszerese a-nak”*
   b) *(a,b) ∈ S, ρ_2: “b-a=2”*
   c) *(a,b) ∈ S, ρ_3: “1<a<4, 1< b<9, a<b, a és b relatív prímek”*

   Megjegyzés: Két természetes szám relatív prím, ha az 1-en kívül nincs közös osztójuk. A kérdéssel bővebben a következő fejezetekben foglalkozunk.

   Megoldás:

   a) S = {(*1,2*), (*2,4*), (*3,6*), (*4,8*), (*5,10*), (*6,12*)}
   b) S = {(*1,3*), (*2,4*), (*3,5*), (*4,6*), (*5,7*), (*6,8*), (*7,9*), (*8,10*), (*9,11*)}
   c) S = {(*2,3*), (*2,5*), (*2,7*), (*2,9*), (*2,11*), (*3,5*), (*3,7*), (*3,8*), (*3,10*), (*3,11*), (*4,5*), (*4,7*), (*4,9*) }

2) Adott egy E, egy adott település lakosait tartalmazó, halmaz. Vizsgáljuk meg, a *ρ*: „*azonos magasságú*” reláció tulajdonságait.
   Megoldás:
   – *a ∈ E, a ρa,* a reláció **reflexív**, hiszen minden lakos azonos magasságú önmagával;
   – *a, b ∈ E, a ρ b ⟹ b ρ a,* a reláció **szimmetrikus**, hiszen *a* és *b* azonos magasságúak;
   – *a, b, c ∈ E, a ρ b és b ρ c ⟹ a ρ c,* a reláció **tranzitív**, hiszen ha *a* lakos azonos magasságú *b* lakossal és *b* azonos magasságú *c* lakossal, akkor könnyen belátható, hogy *a* is azonos magasságú c-vel.

Megállapítjuk, hogy az „*azonos magasságú*” reláció egy ekvivalenciareláció. A példát tekintve, könnyen elképzelhető, hogy a település lakosait halmazokba rendezzük, az „azonos magasságú” reláció szerint. Feltételezhetően több halmazunk keletkezne: *160 cm*, *161 cm…181 cm*, …de a halmazok száma véges lenne, a halmazoknak természetesen nem lenne közös eleme, a halmazok páronként diszjunktak lennének, de az összes így keletkezett halmaz együttesen tartalmazná a település összes lakosát. Azt mondjuk, hogy a lakosok halmazán az „*azonos magasságú*” ekvivalenciareláció egy *osztályfelbontást* generált.

Egy, az A halmazon értelmezett ekvivalenciareláció fogalma szorosan kapcsolódik az A halmaz ún. osztályokra való felbontásának fogalmához. Ha valamely A halmaz felírható bizonyos, páronként diszjunkt részhalmazainak egyesítéseként, akkor azt mondjuk, hogy A-t osztályokra bontottuk, a szóban forgó részhalmazokat a felbontás osztályainak nevezzük. Amennyiben I = {1,2,3,…} egy indexhalmaz, akkor az A halmaz osztályokra való felbontása az értelmezés szerint azt jelenti, hogy

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i \ \wedge \ A_i \cap A_j = \emptyset \ (\forall i, j \ \in I \ \wedge i \neq j)$$

Tétel: *egy A halmazon értelmezett bármely ρ ekvivalenciareláció meghatározza az A-nak egy osztályfelbontását és fordítva, A-nak minden osztályfelbontása meghatároz egy-egy ekvivalenciarelációt A-ban*

3.3 KITŰZÖTT FELADATOK

1) Adjuk meg a következő relációk tulajdonságait. Ekvivalenciareláció-e? Rendezési reláció-e?
   a) Emberek halmazán az „*ugyanabban a hónapban születet*”
   b) Emberek halmazán az „ug*yanaz a hajszíne, mint*”
   c) Emberek halmazán az „*alacsonyabb, mint*”
   d) Emberek halmazán a „*nem azonos magasságú*”
   e) Emberek halmazán az „*azonos magasságú*”
   f) Emberek halmazán az „*idősebb, mint*”
   g) Emberek halmazán az „*ugyanabból a városból származik*”
   h) Valamely számhalmazon a < reláció.
   i) Valamely számhalmazon a > reláció.
   j) Valamely számhalmazon a ≤ reláció.
   k) A háromszögek halmazán a kongruencia, az egybevágóság.
   l) A háromszögek halmazán a hasonlóság.
   m) Egy sík egyenesei között a párhuzamosság.
   n) A Föld országainak halmazán az ugyanazon a földrészen vannak

2) Adottak az
   A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} és
   B = {5, 10, 12, 15, 24, 26, 40} halmazok.
   a) Állítsuk elő az $A \times B$ halmazt;
   b) Adjuk meg a következő relációkat, felsorolva a relációban levő számpárokat, ha $a \in A$ és $b \in B$;
   - $\rho_1 = \{(a,b) \mid a < b, a\epsilon A, b\epsilon B\}$ - „*kisebb*”
   - $\rho_2 = \{(a,b) \mid a|b, a\epsilon A, b\epsilon B\}$ - „*osztja*”
   - $\rho_3 = \{(a,b) \mid |a-b|\ páros, a\epsilon A, b\epsilon B\}$ - „*a különbség abszolút értéke páros*”
   - $\rho_4 = \{(a,b) \mid a \equiv b (mod\ 3), a\epsilon A, b\epsilon B\}$ - „*a-nak és b-nek a 3-mal való osztási maradéka azonos*”
   - $\rho_5 = \{(a,b) \mid a \equiv b (mod\ 3), a\epsilon A, b\epsilon B\}$ - „*a-nak és b-nek a 3-mal való osztási maradéka azonos*”
   - $\rho_5 = \{(a,b) \mid a < b, a-nak\ \text{és}\ b-nek\ van\ közös\ prímosztója, a\epsilon A, b\epsilon B\}$

4. FÜGGVÉNYEK

A hozzárendelés és a reláció fogalmának ismeretében többféleképpen is definiálhatjuk a függvényt.

Definíció: Valamely A és B halmazok között egy ρ relációt függvénynek nevezzük, ha az A halmaz minden eleme a B halmaz egy és csak egy elemével van relációban . Megjegyezzük, hogy a B halmaz nem feltétlenül különbözik az A halmaztól.

Definíció Valamely nem üres A halmaz minden eleméhez hozzárendeljük egy B halmaz egy, de csak egy elemét, akkor függvényt adunk meg. Ebben az esetben az A halmaz a függvény *értelmezési tartománya*, a B halmaz a függvény *értékkészlete*.

Szintén a reláció fogalmát használja fel a következő meghatározás:
Definíció: Az A és B halmazokon adott f kétváltozós relációt az A-n értelmezett függvénynek nevezzük, ha bármely a $\in A$ esetén az $f[a]$ metszet egyelemű részhalmaza B-nek.

Leggyakrabban használt függvényjelölések: $f: A \longrightarrow B$ vagy $A \overset{f}{\rightarrow} B$.

Definíció: Az $f[a]=\{b\}$ egyelemű halmaz, $a \in A$, $b \in B$, az a elemnek $f(a)=b$ elem a *képe*, vagy az f függvény *értéke* vagy *helyettesítési értéke*.

Definíció: A $\Gamma=\{(a,f(a)| \ a \in A)\}$ halmazt a függvény *grafikonjának* nevezzük.

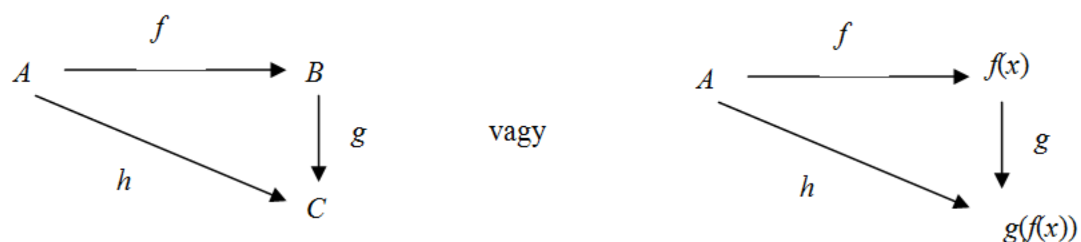
Definíció: Az $f: A \longrightarrow B$ függvény monoton növekvő, ha $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.

Definíció: Az $f: A \longrightarrow B$ függvény szigorúan növekvő, ha $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Definíció: Az $f: A \longrightarrow B$ függvény monoton csökkenő, ha $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

Definíció: Az $f: A \longrightarrow B$ függvény szigorúan csökkenő, ha $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Definíció: Tekintsük az $f: A \rightarrow B$ és $g: B \rightarrow C$ függvényeket. A $g \circ f: A \rightarrow C$, függvényt, amelyre a $h(x) = g \circ f(x) = g(f(x))$ függvény a g és f függvények *összetett függvénye*.



1. ábra

Injektív függvények – szürjektív függvények- bijektív függvények

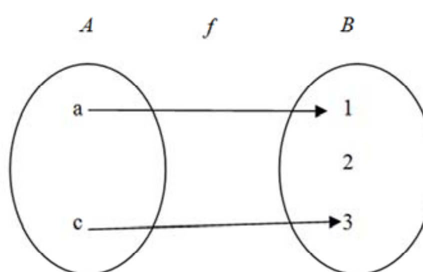
Definíció: Egy $f: A \longrightarrow B$ *injektív*, ha $\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
A fenti definíció úgy is igaz, ha az egyenlőségeket egyenlőtlenségre cseréljük: Egy $f: A \longrightarrow B$ *injektív*, ha $\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$.

Definíció: Egy $f: A \longrightarrow B$ *injektív*, ha $\forall y \in B$, esetén az $f(x)=y$ egyenletnek legtöbb egy $x \in A$ megoldása van.

Definíció: Egy függvény *szürjektív*, ha $\forall\, y \in B, \exists x \in A, \acute{u}gy\ hogy\ y = f(x)$.

Definíció: Egy függvény *bijektív* (*bijekció* vagy *kölcsönösen egyértelmű leképezés*), ha injektív és szürjektív.
Tekintsük az 1_A függvényt, $1_A: A \to A, 1_A(x) = x,$ az identikus függvényt.
Definíció: Egy $f: A \longrightarrow B$ függvény invertálható, ha létezik egy $g: B \longrightarrow A$ függvény, g az f inverze úgy, hogy $g \circ f = 1_A$ és $f \circ g = 1_B$. A g függvényt f^{-1}-gyel is jelölik.
A bijekció definíciójából következik, hogy ha egy függvény bijektív, akkor az értelmezési tartománynak és az értékkészletnek ugyanaz a számossága: $f: A \longrightarrow B$, f bijektív $\Rightarrow |A|=|B|$.
Tétel: egy függvény akkor és csak akkor invertálható, ha bijektív.

1) A következő diagrammal értelmezett $f: A \to B$ függvény injektív:

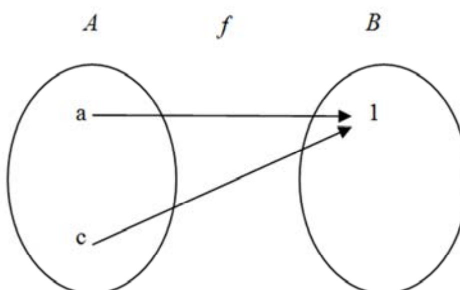


2. ábra

$$1 \neq 3 \equiv f(a) \neq f(c) \Rightarrow a \neq c$$

Az olvasó mondja, meg, hogy a függvény szürjektív-e? Miért?

2) A következő diagrammal értelmezett f: $A \to B$ függvény szürjektív:

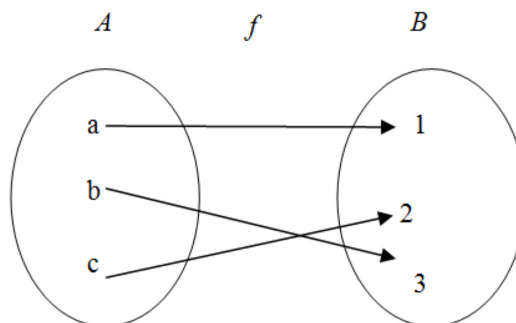


3. ábra

$$\forall\, y \in B, \exists x \in A, \acute{u}gy\ hogy\ y = f(x).$$

Az olvasó mondja meg, hogy a függvény injektív-e? Miért?

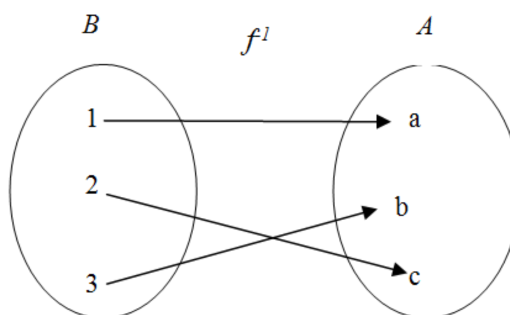
3) A következő diagrammal értelmezett f: $A \to B$ függvény bijektív:



4. ábra

Az olvasó mondja meg, miért szürjektív és miért injektív a függvény?

4) A hármas pontban leírt függvény inverz függvénye: $f^{-1} : B \to A$



5. ábra

4.1 FÜGGVÉNYEK ÁBRÁZOLÁSA A SÍKBELI DERÉKSZÖGŰ KOORDINÁTARENDSZERBEN

Példa: Ábrázoljuk a derékszögű koordináta-rendszerben a következő függvényeket

a) $A = \{x \in \mathbb{Z} | |x| < 5\}, f: A \to B, f(x) = \frac{x^2+1}{x+6}$.
Megoldás: leírjuk a függvényt megadó rendezett párokat.
Az A halmaz: {-4, -3, -2, -1,0, 1, 2, 3, 4}

f(−4)= $\frac{17}{2}$;

f(−3)= $\frac{10}{3}$;

f(−2)= $\frac{5}{4}$;

f(−1)= $\frac{2}{5}$;

f(0)= $\frac{1}{6}$;

f(1)= $\frac{2}{7}$;

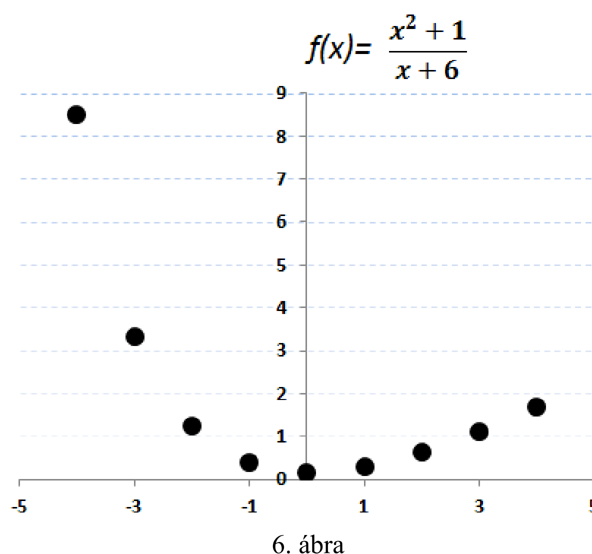
f(2)= $\frac{5}{8}$;

f(3)= $\frac{10}{7}$;

f(4)= $\frac{17}{10}$;

A *B* halmaz: $\{\frac{17}{2}, \frac{10}{3}, \frac{5}{4}, \frac{2}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{7}, \frac{5}{8}, \frac{10}{7}, \frac{17}{10}\}$

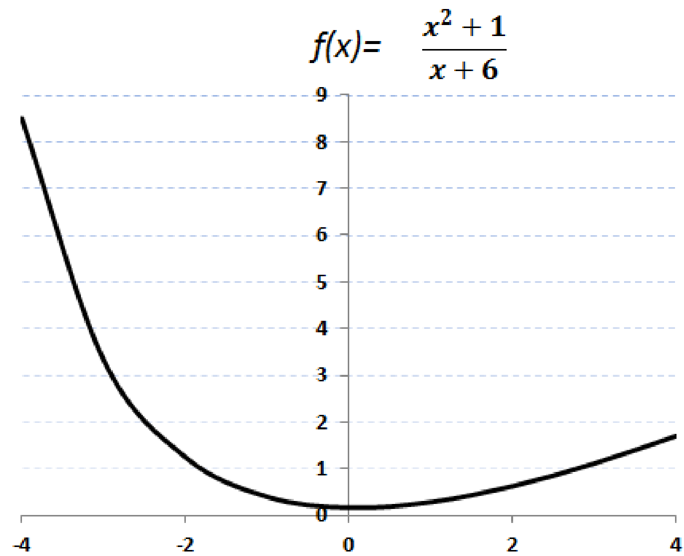
Az *f* függvény grafikus képe:



6. ábra

Miután az értékkészlet nem egy intervallum, így a grafikus képünk is pontok halmaza lesz a derékszögű koordinátarendszerben. Amennyiben az *A* halmazt módosítjuk úgy, hogy x∈ ℝ, $|x| < 4$, azaz $x \in (-4,4)$, a függvény grafikus képének a következő ábrát kapjuk:

b) $A = \{x \in \mathbb{R} | |x| < 4\}, f: A \rightarrow B, f(x) = \frac{x^2+1}{x+6}$.



7. ábra

4.2 ÖSSZETETT FÜGGVÉNYEK

A továbbiakban olyan függvényeket tárgyalunk, amelyeknek az értelmezési tartománya és az értékkészlete a valós számok halmaza. Az egyes leszűkítésekre külön kitérünk.

Példa : Adottak az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3 - 2 \cdot x$ és a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 2 \cdot x$ függvények. Adjuk meg az $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ és $g \circ g$ függvények megfeleltetési törvényét.

Megoldás:

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = 3 - 2g(x) = 3 - 2(x^2 - 2 \cdot x) = -2x^2 + 4x + 3.$$

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = \big(f(x)\big)^2 3 - 2f(x) = (3 - 2x)^2 - 2(3 - 2x) = 4x^2 - 8x + 3.$$

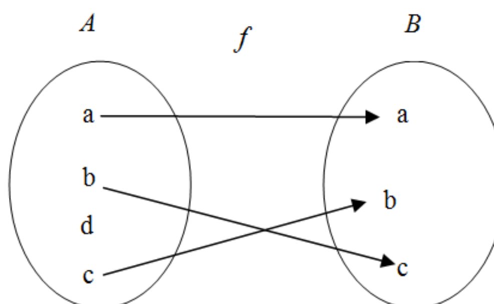
$$h(x) = (f \circ f)(x) = f\big(f(x)\big) = 3 - 2f(x) = 3 - 2(3 - 2x) = 4x - 3$$

$$h(x) = (g \circ g)(x) = g\big(g(x)\big) = \big(g(x)\big)^2 - 2g(x) = (x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x) =$$
$$= x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x.$$

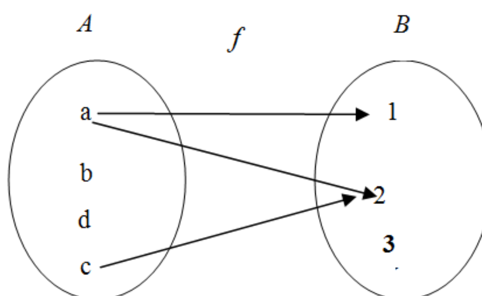
4.3 KITŰZÖTT FELADATOK

1) Vizsgáljuk meg a következő ábrák függvényeket ábrázolnak-e? Amennyiben a válasz igen, úgy vizsgáljuk meg a függvények szürjektívitását, injektívitását és bijektivitását. Invertálhatóság esetén ábrázoljuk az inverz függvényt

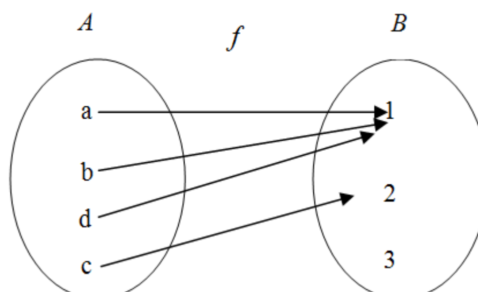
a)



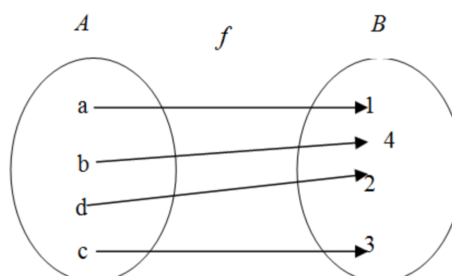
b)



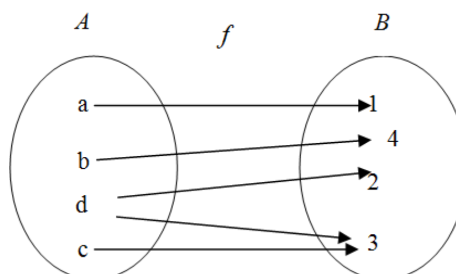
c)



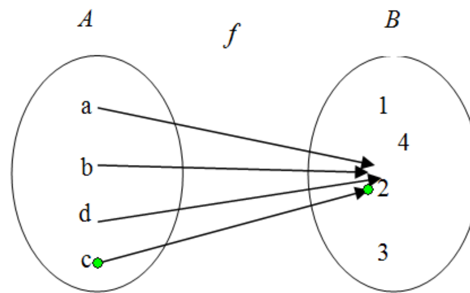
d)



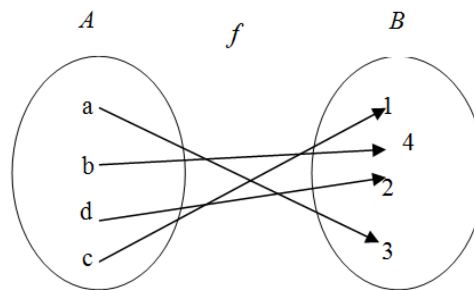
e)



f)



g)



2) Ábrázoljuk a következő függvényeket
   a) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $f: A \to f(A), f(x) = x + 2$
   b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x + 2$
   c) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $f: A \to f(A), f(x) = x^2 + 1$
   d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$
   e) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $f: A \to f(A), f(x) = x^3 - 3 \cdot x$
   f) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 3 \cdot x$

3) Adottak az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, és a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények. Adjuk meg az $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ és $g \circ g$ függvények megfeleltetési törvényét.
   a) $f(x) = 3x, g(x) = 3 - x^2$
   b) $f(x) = x, g(x) = 3x + 4x^2$
   c) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}, g(x) = x^2 + 2$

4)

5) Adott az f :**R→R**, $f(x)$ x^2 - x^4 függvény. Számítsuk ki: $(f \circ f \circ f \circ f)(1)$ értékét.

5. A TERMÉSZETES SZÁMOK HALMAZA

A halmazok számossága egy ekvivalenciareláció, mivel a számosság:

- reflexív: $|A| = |A|$;
- szimmetrikus $|A| = |B| \Rightarrow |B| = |A|$;
- tranzitív: $|A| = |B| \wedge |B| = |C| \Rightarrow |A| = |C|$

Egy ekvivalenciareláció egy halmaz osztályfelbontását határozza meg. Egy adott n természetes szám, a számosság ekvivalenciareláció által, a véges számosságú halmazok halmazán generált osztályfelbontás egy osztálya: az osztályba tartozik az összes olyan A halmaz, melyre igaz, hogy $|A| = n$. Például így az 5 szám a halmazok osztályfelbontásából azt az osztályt írja le, amelyekben 5-ös számosságú halmazok tartoznak. A 0 szám az üres halmazok osztálya.

5.1 MŰVELETEK A TERMÉSZETES SZÁMOK HALMAZÁN

Összeadás

A természetes számok halmazán az összeadást a következőképpen értelmezzük:

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} ,(a,b)\longrightarrow a+b, \forall a, b \in \mathbb{N}$$

A természetes számok összeadását a halmazok egyesítésével a következőképpen értelmezzük: legyen A és B két diszjunkt halmaz, az a és b ekvivalenciaosztályokból. A két halmaz egyesítésével keletkező $A \cup B$ halmaz számossága:$|A \cup B| = a + b$.

Az összeadás tulajdonságai:

a) asszociatív: $a + (b + c) =(a + b) + c, \forall a, b, c \in \mathbb{N}$;
   Megjegyzés: a c természetes szám egy C halmaz számossága. C halmaz diszjunkt az A és B halmazokkal.
b) kommutatív: $a + b = b + a, \forall a, b \in \mathbb{N}$;
c) a 0 az összeadás semleges eleme : $a + 0 = a, \forall a \in \mathbb{N}$;
   Megjegyzés: a 0 természetes szám az üres halmaz számossága.

Kivonás

A természetes számok esetében a kivonás visszavezethető a következő feladatra: ismerve két szám összegét és az egyik számot, határozzuk meg a másik számot. A halmazok segítségével a kivonást a következőképpen értelmezzük: legyen az A halmaz és $|A| = a$ (kisebbítendő) és az A halmaz egy B részhalmaza, $B \subset A$, $|B| = b$ (kivonandó). Ekkor az $A \backslash B$ halmaz számossága $|A \backslash B|=a - b$ az a és b számok különbsége. A természetes számok halmazán a kivonás csak akkor lehetséges, ha a kisebbítendő kisebb, mint a kivonandó. Ezt a feltételt a $B \subset A$ biztosítja.

Szorzás

A természetes számok halmazán a szorzást a következőképpen értelmezzük:

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, (a,b) \longrightarrow a \cdot b, \ \forall a,b \in \mathbb{N}$$

Az a és b számok a szorzótényezők, az $a \cdot b$ szám a szorzat. A szorzást egyenlő tagok ismételt összeadásaként is értelmezhetjük, a következőképpen: $a \cdot b = \underbrace{b+b+\ldots+b}_{a\text{ - szor}}$.

Ha a szorzat egyik tényezője 0, akkor a szorzat is 0: $a \cdot 0 = 0, \ \forall a \in \mathbb{N}$. Halmazokkal a szorzás a következőképpen fejezhető ki: Adottak az A és B halmazok, $|A|=a$ és $|B|=b$. Az $a \cdot b$ szorzat értékét az $A \times B$ halmaz számossága adja: $a \cdot b = |A \times B|$.

A szorzás tulajdonságai:

a) asszociatív: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \ \forall a,b,c \in \mathbb{N}$;
b) kommutatív: $a \cdot b = b \cdot a, \ \forall a,b \in \mathbb{N}$;
c) az *1* a szorzás semleges eleme: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$;
d) a szorzás disztributív az összeadásra nézve: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \ \forall a,b,c \in \mathbb{N}$.

Osztás

A természetes számok esetében az osztás visszavezethető a következő feladatra: ha ismerjük két szám szorzatát, és az egyik szorzótényezőt, határozzuk meg a másik szorzótényezőt. Az osztást ($a:b$, a az osztandó, b az osztó) úgy is értelmezhető, mint az osztó ismételt kivonását az osztandóból: "*hányszor vonható ki az osztó az osztandóból úgy, hogy a végeredmény - a maradék - szigorúan kisebb legyen mint az osztó*". Az osztásnak a halmazokkal való értelmezése a következőképpen történik: Adott az A halmaz, $|A|=a$, és egy b szám. A kérdés az, hogy hány diszjunkt, egyenként b számoságú részhalmazát lehet előállítani az A-nak. A kérdést úgy is feltehetjük, hogy amennyiben az A halmazból b darab, diszjunkt, azonos számoságú halmazt szeretnénk előállítani, egyenként mekkora lesz ez a számosság.

Könnyen belátható, hogy amennyiben $b=0$, úgy az osztás nem lehetséges.

Maradékos osztás

Bármely két a, b természetes szám esetében, $b \neq 0$, akkor létezik két egyértelműen meghatározott természetes szám, q (hányados) és r (maradék) úgy, hogy:

$$a = b \cdot q + r, \ r < b, \qquad a,b,q,r \in \mathbb{N}.$$

Értelmezés: *Ha az adott a és b számokhoz található egy olyan q szám, amelyre* $a = b\cdot q$*, akkor azt mondjuk, hogy a osztható b-vel, illetve a szám b számnak a többszöröse*. Ezt a továbbiakban $b|a$-val jelöljük.

Megoldott feladatok

1) Adjuk meg az összes természetes számot, amely 4-gyel osztva a maradék 24.
   Megoldás: Az $a = b\cdot q+r$ összefüggésből kiindulva kapjuk, hogy $a = 4b+24$. A b-nek rendre az 1, 2,… értékeket adva kapjuk a keresett halmazt: $A = \{28, 32, 36, 40, 44,\ldots\}$
2) Két szám összege 105. Adjuk meg a két számot, ha a nagyobbat a kisebbel osztva, a hányados 7, a maradék 9.
   Megoldás: A két számot jelöljük a-val és b-vel. Az $a = b\cdot q+r$ összefüggést felhasználva kapjuk, hogy
   $$a = 7\cdot b+9 \Longrightarrow a+b = 8\cdot b+9 = 105 \Rightarrow 8\cdot b = 96 \Rightarrow b = 12 \Rightarrow a = 7\cdot 12+9 = 93.\square$$

Az oszthatóság tulajdonságai

a) *Bármely természetes szám esetében* $a|a$ *(reflexivitás) ;*
b) *Ha* $a|b$ *és* $b|a$ *akkor* $a = b$ *(antiszimmetria)*;
c) *Ha* $a|b$ *és* $b|c$ *akkor* $a|c$ *(tranzitivitás);*
d) *Az 1 szám minden számnak osztója;*
e) *A 0 szám minden számmal osztható;*
f) *Ha* $a|b$ *és* $a|c$ *akkor* $a|(b+c)$*;*
g) *Ha* $a|b$ *és* $a|c$ *és* $b > c$*, akkor* $a|(b - c)$

5.2 PRÍMSZÁMOK - TÖRZSSZÁMOK

Értelmezés : *Valamely 1-től különböző természetes számot akkor nevezünk prímszámnak (törzsszámnak), ha* $p = a \cdot b$ *esetén ,* $a, b, p \in \mathbb{N}$*,* $a=1$ *vagy* $b=1$*. Ez az értelmezés egyenértékű azzal, hogy a p természetes szám akkor és csak akkor prímszám, ha csak 1-gyel és p-vel, önmagával osztható.*

Értelmezés: V*alamely 0-tól és 1-től különböző p természetes számot akkor nevezünk prímszámnak, ha*

$p \mid a \cdot b$ *esetén* $p|a$ *vagy* $p|b$ *teljesül*.

Az első értelmezésből következik, hogy egy *p* prímszámnak csak a *triviális* $p= 1 \cdot p$ *felbontása* létezik. Összetett számok az olyan természetes számok, amelyeknek van nem triviális felbontásuk.

Tétel: *Bármely* $c>1$ *természetes szám vagy prímszám, vagy van prímtényezője.*

Bizonyítás: amennyiben a c szám nem prímszám, akkor létezik egy nem triviális osztója, legyen ez a szám *p*. Ez a *p* szám biztosan prím, hiszen ha nem lenne az, akkor nem lehetne a legkisebb nem triviális osztó

Prímesség vizsgálata

Egy naiv algoritmus önként adódik: legyen a $p \in \mathbb{N}$, $1<p$, természetes szám, illetve az

$M = \{x|\ 1\leq x\leq p,\ x,p \in \mathbb{N}\ \}$ és $N = \{y|\ y|p,\ y\in M\ \}$ halmazok. Amennyiben |N|=2, úgy a p szám prímszám (az N halmaznak pontosan két eleme van, ezek lennének a p szám osztói. Másképpen, minden szám, amelynek pontosan két osztója van az prímszám). A fentebb vázolt algoritmus pontosan p számot vizsgál meg az 1, 2, 3,.. ,p halmazból, és a p szám osztóit az N halmazba rakja át. Ha a keresés végén az N halmaz számossága 2, úgy a szám prím. A számolás mennyiségét tovább csökkenthetjük, ha figyelembe vesszük, hogy $p = a\cdot b$ esetében a és b nem lehet nagyobb $\sqrt{p}$ –nél. Ha $a>\sqrt{p}$ és $b>\sqrt{p}$, akkor $a\cdot b > \text{p}$ ami lehetetlen, hiszen a $p = a\cdot b$ egyenlőségből indultunk ki. Így egy gyorsabb keresést eredményez az az algoritmus, amely a $\{3,5,7,11,...[\sqrt{p}]\}$ halmazban keresi p osztóit.

Példa: a 883 ebben a megközelítésben azért prím, mert a {3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29} halmazban nincs osztója. Figyelembe vettük azt is, hogy páros és prím csak a 2 szám lehet, az összes többi páros szám nem prím, így páros osztókat nem is veszünk figyelembe.

Tétel: *Végtelen sok prímszám van*.

Bizonyítás: tételezzük fel, hogy a prímszámok halmaza véges: 2, 3, 5… p_k . Képezzük a prímek szorzatát: $P= 2\cdot 3 \cdot 5\cdot ... \cdot p_k$ és képezzük a P+1 számot. Amennyiben csak ez a k darab prímszám van, az új szám, P+1, nem lesz osztható egyetlen prímszámmal szem, így a P+1 egy új prímszám vagy van egy 2, 3, 5,. . ., p_k-tól különböző prím osztója (ebben az esetben a feltételezésünk, mely szerint pontosan k prímszám van, bizonyult hamisnak). A műveletsort (szorzás és utána eggyel való növelés) végtelenszer ismételve, végtelen sok prímszámot kapunk. Következésképpen a prímszámok halmaza végtelen.□

Félprímek

Értelmezés: *Félprím minden olyan természetes szám, amely két (nem feltétlenül különböző) prímszám szorzata. Diszkrét félprímről beszélünk, amennyiben a szorzatot alkotó két prímszám különböző. Értelmezés szerint a félprímeknek nincs összetett szám valódi osztójuk.*

Példa félprímekre 4, 6, 9, 10, 14, 15, 21, 22, 25, 26, 33, 34, 35, 38, 39, 46, 49, 51, 55, 57, …

5.3 A LEGNAGYOBB KÖZÖS OSZTÓ – *lnko* – (*a*,*b*)

Bármely két természetes számnak mindig van legalább egy közös osztója. Ha több is van, akkor tekintsük a legnagyobbat. Ennek a meghatározására több módszer is a rendelkezésünkre áll. A legismertebb az Eukleidész-féle algoritmus. Ennek alapja a következő tétel:

Tétel: *Legyen a és b számok legnagyobb közös osztója d. Tudjuk, hogy* $a = bq+r,\ a,b,q,r\in \mathbb{N}$. *Ekkor b-nek és r-nek szintén d a legnagyobb közös osztója.*

A tétel bizonyítása igen egyszerű: induljunk ki abból, hogy $d|a$ és $d|b$, így felírhatjuk, hogy $a=a_1\cdot d$ és $b=d\cdot b_1$. Az oszthatósági relációt felhasználva, mely szerint $a = b\cdot q +r \implies a_1\cdot d= d\cdot b_1\cdot q+r \implies r = a_1\cdot d-d\cdot b_1 = d(a_1-b_1) \implies d|r$. *Fordítva, amennyiben* $d|b$ *és* $d|r$, *tehát* $b =b_1\cdot d$ *és* $r = r_1\cdot d$, *az oszthatósági relációt felhasználva kapjuk, hogy* $a = b_1\cdot d\cdot q+ r_1\cdot d=d\cdot(b_1q+ r_1) \implies d|a$ □

Röviden : ha $a = b\cdot q +r$, akkor $(a,b) = (b,r)$. Itt (a,b)-vel az a és b számok legnagyobb közös osztóját jelöltük. Tekintsük a következő összefüggéseket:

$$a = bq+r \qquad 0\leq r <b$$

$$b=rq_1+r_1 \qquad 0\leq r_1 <r$$

$$r=r_1q_2+r_2 \qquad 0\leq r_2 <r_1$$

$$r_1=r_2q_3+r_3 \qquad 0\leq r_3 <r_2$$

...

$$r_{n-1}=r_nq_{n+1}+r_{n+1} \qquad 0\leq r_{n+1} <r_{n+1}$$

így $(a,b)=(b,r)=(r,r_1)=(r_1,r_2)=\ldots(r_{n-1},r_n)$. Véges számú lépés után $r_{n+1}=0$ lesz, tehát $(a,b)=(r_n,0)$, és ekkor $(a,b) = r_n$

Példa:

a	*b*	*r*
525	231	63
231	63	42
63	42	21
42	21	0

Tehát (525,231) = 21.

Egy másik módszer, hogy a két természetes számot, amelynek az *lnko*-ját keressük prímtényezőkre bontjuk, majd a közös tényezőket a legkisebb hatványkitevőkön összeszorozzuk:

Példa:

$$525 = 3\cdot 5^2\cdot 7$$

$$\underline{231 = 3\cdot 7\cdot 11}$$

$$(525,231) = 3\cdot 7 = 21$$

Megjegyzés: ha két természetes szám esetében (a,b) = 1, azaz a legnagyobb közös osztó 1, akkor a két számot *relatív prímek*nek nevezzük.

5.4 LEGKISEBB KÖZÖS TÖBBSZÖRÖS *lkkt* – [a,b]

A legkisebb közös többszörös számolási képlete:

$$[a,b] = \frac{a\times b}{(a,b)}$$

Példa:

$$[525,231]=\frac{525\times 231}{(525,231)} = \frac{121275}{21} = 5775$$

Egy másik módszer, hogy a két természetes számot, amelynek az *lkkt*-jét keressük, prímtényezőkre bontjuk, majd a közös és nem közös tényezőket a legnagyobb hatványkitevőkön összeszorozzuk:

$$525 = 3\cdot 5^2\cdot 7$$

$$\underline{231 = 3\cdot 7\cdot 11}$$

$$(525,231) = 3\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11= 5775$$

5.5 OSZTHATÓSÁGI SZABÁLYOK

- 2-vel osztható természetes szám utolsó számjegye osztható 2-vel.
- 3-mal osztható természetes szám számjegyeinek összege osztható 3-mal.
- 4-gyel osztható természetes szám utolsó két számjegyéből képzett kétjegyű szám is osztható 4-gyel. Példa: 624=156 ·4, – mivel 4|24.
- 5-tel osztható természetes szám utolsó számjegye 0 vagy 5.
- 6-tal osztható természetes szám 2-vel és 3-mal is osztható.
- 7-tel osztható az a szám, melynek számjegyeit hátulról hármasával csoportosítva és váltakozó előjellel összeadva a kapott szám osztható 7-tel. *Példa 7|87206* mivel (*0+8+7*)-(*2+0+6*)=*15-8*=7
- 8-cal osztható természetes szám utolsó három számjegyéből képzett háromjegyű szám osztható 8-cal. Példa: 8|11616, mivel 8|616, mivel 616=77· 8
- 9-cel osztható természetes szám számjegyeinek összege is osztható 9-cel. Példa: 9|293121, mivel 2+9+3+1+2+1=18, és 9|18
- 10-zel osztható az a szám, amelyiknek utolsó számjegye 0.
- 11-gyel osztható az a természetes szám, melynek páros helyiértéken álló számjegyeinek összege megegyezik a páratlan helyiértéken álló számjegyek összegével, vagy a kettő különbsége 11-nek a többszöröse. Példa: 11|387717, mivel (8+7+7)-(3+7+1)=22-11=11
- 12-vel osztható természetes szám 4-gyel és 3-mal is osztható.

> *Megjegyzés*: bebizonyítható, hogy ha $a, b, p \in \mathbb{N}$ és amennyiben $a|p$, $b|p$ és $(a, b) = 1$, akkor $a \cdot b|p$. Ezt a tulajdonságot figyelembe véve könnyen belátható, hogy ha egy természetes szám osztható 3-mal és 4-gyel, miután (3,4) = 1, ez a szám osztható 12-vel is.

- 13-mal úgy vizsgálhatjuk meg az oszthatóságot, hogy a szám első számjegyétől utolsó előtti számjegyéig képzett számhoz hozzáadjuk az utolsó számjegy 4-szeresét. Az így kapott számra a műveletet megismételjük mindaddig, amíg a keletkező számról eldönthető, hogy osztható-e 13-mal vagy sem Példa: *6253* ⟹ *625+4·3=625+12= 637* ⟹ *63+28 = 91* ⟹ *9 + 1· 4=13* ami osztható 13-mal, tehát az eredeti szám is osztható 13-mal!
- 14-gyel osztható természetes szám 2-vel és 7-tel is osztható.
- 15-tel osztható természetes szám 3-mal és 5-tel is osztható.
- 16-tal osztható természetes szám utolsó négy számjegyéből képzett négyjegyű szám is osztható 16-tal. Példa 16|743488, mivel 16|3488, hiszen 3488=16· 218

- 17-tel úgy vizsgálhatjuk meg az oszthatóságot, hogy a szám első számjegyétől az utolsó előtti számjegyéig képzett számból kivonjuk az utolsó számjegy ötszörösét. A folyamat itt is ismételhető. Pl.: 132770-> 13277-(0*5)=13277-> 1327-(7*5)=1292-> 129-(2*5)=119. 119 osztható 17-tel, osztható az a szám, tehát 132770 is osztható 17-tel.
- 18-cal osztható természetes szám 2-vel és 9-cel is osztható.

5.6 AZ OSZTÓK SZÁMA

Ha egy *n* számot törzstényezőre bontunk, akkor az egyenlő prímtényezőket hatványokba gyűjthetjük:

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots p_k^{\alpha_k}.$$

Az *n* szám osztóinak számát a:

$$\tau(n) = (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \ldots (\alpha_k + 1)$$

kifejezés értéke adja.

Példa: $525 = 3 \cdot 5^2 \cdot 7$ esetében a törzstényezőkre bontott szám osztható 3-mal, 5-tel, 7-tel, $3 \cdot 5=15$-tel, $5^2=25$-tel, $3 \cdot 5^2$-75-tel, $3 \cdot 7=21$-gyel, $3 \cdot 5 \cdot 7=105$-tel, $5 \cdot 7=35$-tel, $5^2 \cdot 7=175$-tel, 1-gyel és $3 \cdot 5^2 \cdot 7=525$-tel. Így az osztók száma 12. A képlet szerint:

$$\tau(525) = (1 + 1) \cdot (2 + 1) \cdot (1 + 1) = 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$$

5.7 MEGOLDOTT FELADATOK

1) Határozzuk meg azt a két legkisebb számot, amelyeknek pontosan 6 osztója van.
   Megoldás: Először felírjuk a 6-ot az összes lehetséges szorzat formájában:

   – *6 = 6·1*
   – *6 = 2·3*
   – *6 = 3·2*
   – *6 = 1·6*

   Megállapítjuk, hogy az osztók számát megadó szorzat legtöbb két tényezős lehet, így két prímszámmal: p_1 és p_2, és két kitevővel $\alpha_1$és α_2 számolunk. A következőkben észrevesszük, hogy $\alpha_1+1=6 \Rightarrow \alpha_1=5$. A legkisebb prímszám a 2, így a legkisebb szám, amelyiknek pontosan 6 osztója van az a $2^5=32$ (az osztók: *1, 2, 4, 8, 16, 32*). Megjegyezzük, hogy az első esetben $\alpha_2+1=1 \Rightarrow \alpha_2=0$.

   A második esetben $\alpha_1+1=2 \Rightarrow \alpha_1=1$ és $\alpha_2+1=3 \Rightarrow \alpha_2=2$. A keresett szám $n = 2^1 \cdot 3^2 = 18$

   (az osztók: *1, 2, 3, 6, 9, 18*).

   A harmadik esetben $\alpha_1+1=3 \Rightarrow \alpha_1=2$ és $\alpha_2+1=2 \Rightarrow \alpha_2=1$. A keresett szám: $n = 2^3 \cdot 3^1=24$ (az osztók: *1, 2, 3, 4, 6, 8, 24*).

   Tehát a két legkisebb szám, amelyiknek pontosan 6 osztója van a *18* és a *24*.

2) Mutassuk meg, hogy ha az $\overline{abc}$ szám osztható 37-tel, akkor a $\overline{bca}$ szám is osztható 37-tel
Megoldás: $\overline{abc} = 100\cdot a + 10\cdot b + c$; $\overline{bca} = 100\cdot b + 10\cdot c + a$. De $10\cdot\overline{abc} = 1000\cdot a + 100\cdot b + 10\cdot c = 999\cdot a + 100\cdot b + 10\cdot c + a$. Tudjuk, hogy $37|\overline{abc}$, így $37|10\cdot\overline{abc}$. Továbbá $999=37\cdot 27$ tehát, $10\cdot\overline{abc}$ helyett a *k-t* használva, és figyelembe véve, hogy $37|k$, tehát $k=37k'$, kapjuk, hogy:
$37\cdot k' = 37\cdot 27\cdot a + \overline{bca} = 37\cdot k'' + \overline{bca} \Rightarrow 37\cdot(k' - k'') = \overline{bca}$ □.

3) Bizonyítsd be, hogy ha egy tetszőleges kétjegyű számot háromszor egymás után írunk, akkor az így kapott hatjegyű szám osztható lesz 13-mal!
Megoldás: $\overline{ababab} = a\cdot 10^5 + b\cdot 10^4 + a\cdot 10^3 + b\cdot 10^2 + a\cdot 10 + b =$
$a\cdot(10^5+10^3+10) + b\cdot(10^4+10^2+1) = 10\cdot a\cdot(10^4+10^2+1) + b\cdot(10^4+10^2+1) = (10^4+10^2+1)\cdot(10\cdot a+b) =$
$= 10101\cdot(10\cdot a+b) = 777\cdot 13\cdot(10\cdot a+b)$□.

4) Hány $\overline{36ab}$ alakú szám van, amely osztható 2-vel?
Megoldás: a feladatnak több megoldása is lehetséges, mi most egyet mutatunk be. Tudjuk, hogy egy szám osztható 2-vel, ha az utolsó számjegye páros. Tekintsük az első páros számot, a 0-t. Rögzítsük est a számot. Ekkor az *a* számjegy tíz számjegyet vehet fel az $A = \{0,1,2,\ldots,9\}$ halmazból, azaz pontosan tíz olyan szám van amely $\overline{36ab}$ alakú, és 0-ra végződik. Maradt még négy páros számjegyünk, amivel végződhet az $\overline{36ab}$ szám, így összesen $5\cdot 10=50$ olyan számunk van amely $\overline{36ab}$ alakú és páros.□

5) Hány $\overline{36ab}$ alakú szám van, amely osztható 3-mal?
Megoldás: Olyan *a*, *b* számjegyeket keresünk, amelyek összege osztható 3-mal, mivel a 3 és 6 számjegyek összege már eleve osztható 3-mal. Tekintsük a következő értéktáblázatot (*1. táblázat*), amelyben $\oplus$ -al jelöltük az első sorban és első oszlopban a megfelelő helyeken lévő számjegyek összegének 3-val való osztási maradékát.

1. táblázat

$\oplus$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0
1	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1
2	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
3	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0
4	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1
5	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
6	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0
7	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1
8	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
9	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0

Megszámolva a 0 értékeket, azt kapjuk, hogy a 0-k száma 34, így a válaszunk: 34 ilyen szám van. Egy másik megoldás lenne az, hogy észrevesszük, hogy a maradékok a (0,1,2) (0,1,2)…(0,1,2) módon csoportosíthatók, pontosan 33 ilyen csoport van és még egy elem, így a keresett számok száma 33+1=34.□

6) Mutassuk meg, hogy az N = $5^{n+3} \cdot 2^n - 125$ bármely n ∈ ℕ szám osztható 45-tel.
Megoldás: az N-et átalakítjuk: $5^n \cdot 5^3 \cdot 2^n - 125 = 5^n \cdot 125 \cdot 2^n - 125 = 125 \cdot (5^n 2^n - 1)$= $125 \cdot (10^n - 1)$. Észrevesszük, hogy a szorzat első tagja osztható 5-tel, illetve azt, hogy a szorzat második tagja 999…9 alakú ($10^n - 1 = 99 \ldots 9$, *n* darab 9-es), tehát a szorzat osztható 5-tel és 9-cel, azaz osztható 45-tel.

5.8 ERŐSEN ÖSSZETETT SZÁMOK

Értelmezés: *Erősen összetett számnak nevezzük az n természetes számot, ha a nála kisebb számok mindenikének kevesebb az osztója (2. táblázat).*

Példa:

2. táblázat

n	1	2	4	6	12	24	36	48	60	120	180	240	360	840
$\tau(n)$	1	2	3	4	6	8	9	10	12	18	20	24	30	32

Tökéletes számok

Az ókori görögök nagyon kedvelték a számmisztikát. Különösen fontos volt az osztók a részek szerepe. A görögök magát a számot nem tekintették a szám osztójának.

Értelmezés: *Egy szám tökéletes, ha egyenlő a nála kisebb osztóinak összegével.*

Példa: *6 = 1+2+3*

5.9 EGY TERMÉSZETES SZÁM UTOLSÓ SZÁMJEGYE

Egy természetes szám utolsó számjegye a szám fontos tulajdonságaira világít rá. Amint már láttuk, az oszthatóság kapcsán vizsgáltuk a szám utolsó számjegyét: páros vagy páratlan, négyzetszám vagy nem. 4-gyel és 25-tel való oszthatóság, 5-tel és 10-zel való oszthatóság kérdését tisztázza a szám utolsó számjegye.

A továbbiakban bevezetünk egy függvényt az utolsó számjegy függvényt, a következőképpen

$$u: \mathbb{N} \longrightarrow \{0, 1, 2, \ldots, 9\},$$

$u(n)$ az $n \in \mathbb{N}$ szám utolsó számjegye.

Tulajdonságok

1) $u(n)$ az n szám tízzel való osztási maradéka.
Valóban, adott az $n = \overline{a_1 a_2 \dots a_k}$ természetes szám. A számot felírhatjuk a következőképpen:
$n = a_1 \cdot 10^{k-1} + a_2 \cdot 10^{k-2} + \dots a_{k-1} \cdot 10^1 + a_k = 10 \cdot (a_1 \cdot 10^{k-2} + a_2 \cdot 10^{k-3} + \dots a_{k-1}) + a_k = 10 \cdot m + a_k$. □

2) Bármely $n, m \in \mathbb{N}$ esetén $u(n+m)=u(u(n)+u(m))$.
Példa: $u(214124+614799)=u(u(214124)+u(614799))=u(4+9)=3$.

3) Bármely $n, m \in \mathbb{N}$ esetén $u(n \cdot m)=u(u(n) \cdot u(m))$.
Példa: $u(214124+614799)=u(u(214124) \cdot u(614799))=u(4 \cdot 9)=6$.

4) Bármely $n, k \in \mathbb{N}$ esetén $u(n^k)=u(u(n)^k)$.
Példa: $u(214124^7)= u(u(214124)^7)= u(4^7)=4$.

5) Adottak az $n = \overline{a_1 a_2 \dots a_k}$ és $m = \overline{b_1 b_2 \dots b_p}$ természetes számok.
   a) Ha $a_k < b_p$ akkor $u(n-m)=u(\overline{1a_k} - u(m))$.
   b) Ha $a_k \geq b_p$ akkor $u(n-m)=u(u(m) - u(m))$.
Példa: $u(214124-799) = u(14-9)=5$ illetve $u(214124-791) = u(4-1)=3$.

6) 2, 3, 7, 8 hatványainak utolsó számjegye (3. *táblázat*)

3. táblázat

k	*4p*	*4p+1*	*4p+2*	*4p+3*
$u(2^k)$	6	2	4	8
$u(3^k)$	1	3	9	7
$u(7^k)$	6	7	9	3
$u(8^k)$	1	8	4	2

7) 4 és 9 hatványainak utolsó számjegye (4. *táblázat*):

4. táblázat

k	*2p*	*2p+1*
$u(4^k)$	6	2
$u(9^k)$	1	3

5.10 MEGOLDOTT FELADATOK

1) Adott az $a = 2^0+2^1+2^2+\ldots+2^{2017}$. Adjuk meg az a+1 szám utolsó számjegyét.
   Megoldás: $1 + a = 2^0 + 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{2017} = (2^1+2^1) + 2^2 + \ldots + 2^{2017} = (2^2+2^2) + \ldots + 2^{2017} = \ldots = (2^{2016}+2^{2016}) + 2^{2017} = 2^{2017}+2^{2017} = 2^{2018} \Rightarrow u(1+a)=u(2^{2018})=4$.
2) Adottak az $a = 2^7\cdot3^6\cdot5^{21}$ és $b = 2^{41}\cdot3^6\cdot5^{11}$.
   a) Adjuk meg, hogy az $a\cdot b$ szám hány nullában végződik.
      Megoldás: $a \cdot b = 2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^{21} \cdot 2^{41} \cdot 3^6 \cdot 5^{11}$
      $= 2^{7+41} \cdot 3^{6+6} \cdot 5^{21+11}$
      $= 2^{48} \cdot 3^{12} \cdot 5^{32}$
      $= 2^{32} \cdot 2^{16} \cdot 3^{12} \cdot 5^{32}$
      $= (2 \cdot 5)^{32} \cdot 2^{16} \cdot 3^{12}$
      $= 10^{32} \cdot 2^{16} \cdot 3^{12}$

      Az utolsó kifejezésből látható, hogy a szorzat pontosan 32 nullában végződik.
   b) Adjuk meg az $a\cdot b$ szám utolsó nem nulla számjegyét.
      Megoldás: Felhasználjuk az a) pont eredményét: a szorzat megalkotásában a nem nulla számjegyeket a $2^{16} \cdot 3^{12}$ szorzat hozza, hiszen 10^{32} csak a nullákért "felelős". Ezek szerint a keresett szám $u(2^{16} \cdot 3^{12}) = u(6\cdot3)=8$

5.11 NÉGYZETSZÁMOK

Értelmezés: *Négyzetszámon vagy teljes négyzeten (teljes második hatványon) olyan egész számot értünk, amely felírható valamely egész szám négyzeteként, más szóval egy egész szám önmagával vett szorzataként, második hatványaként. Más meghatározás szerint egy egész szám pontosan akkor négyzetszám, ha négyzetgyöke létezik, és az egész. Tágabb értelemben véve négyzetszámnak számít az a törtszám is, amelynek négyzetgyöke racionális*[1].

A táblázat a négyzetszámok sorozatát tartalmazza $1, 2^2, 3^2, 4^2,\ldots,29^2$, az *utolsó számjegy* szerint csoportosítva (5. *táblázat*):

5. táblázat

[0]	[1]	[4]	[5]	[6]	[9]
100	1	4	25	16	9
400	81	64	225	36	49
	121	144	625	196	169
	361	324		256	289
	441	484		576	529
	841	784		676	729

[1] A racionális számokkal a továbbiakban foglalkozunk.

Megfigyelhető, hogy a négyzetszámok utolsó számjegye a {0, 1, 4, 5, 6, 9} egy eleme. Megállapítjuk, hogy nem lehet négyzetszám az olyan szám, amelynek utolsó számjegye a {2, 3, 7, 8} egy eleme.

Fontos megállapítások:

a) *Négyzetszámok 4-gyel osztva 0 vagy 1 maradékot adnak.*
b) *Négyzetszámok 3-mal osztva 0 vagy 1 maradékot adnak.*
c) *Ha egy négyzetszám osztható egy prímszámmal, akkor osztható annak négyzetével is*
d) *Ha egy szám két szomszédos négyzetszám között van, akkor nem lehet négyzetszám. Pld: 9^2=81 és 10^2=100, tehát 90, 91, 92... 98,99 biztosan nem négyzetszámok*
e) *Két egymás utáni köbszám közötti szám nem lehet négyzetszám. Pld:10^3=1000 és 11^3= 1331, így 1005, 1006... 1329, 1330 nem lehet köbszám*

Az a) és b) megállapítások másképpen és némileg kibővítve így hangzanak: *ha egy szám felírható 3k+2, 4k+2, 4k+3, 5k+2, 5k+3, 6k+2, 6k+5 formában, akkor nem teljes négyzet!*

5.12 UTOLSÓ SZÁMJEGY - MEGOLDOTT FELADATOK

1) Bizonyítsuk be, hogy az $m = 5\cdot 2^n+3$ szám nem lehet teljes négyzet, bármely $n \in \mathbb{N}$ esetében.
Megoldás: bevezetjük az $u(k)$ függvényt, amely adott k természetes szám esetében a k szám utolsó számjegyét adja vissza. Például $u(216)=6$, $u(11)=1$. Észrevesszük, hogy az $u(2^n)$ függvény értékkészlete a $\{2,4,6,8\}$ halmaz, bármely $n>0$, $n \in \mathbb{N}$ esetében. Így az $u(m)$ lehetséges értéke a {3}. Előző megállapításunkat alapul véve, egy négyzetszám nem végződhet 3-sal, tehát m nem négyzetszám.□

2) Bizonyítsuk be, hogy az E = $1^{1997}+2^{1997}+3^{1997}+\ldots+1997^{1997}$ értéke nem lehet teljes négyzet.

Megoldás: Elkészítjük minden k számjegyre az $u(k)$ függvény értéktáblázatát (*6. táblázat*):

6. táblázat

k	$u(2^k)$	$u(3^k)$	$u(4^k)$	$u(5^k)$	$u(6^k)$	$u(7^k)$	$u(8^k)$	$u(9^k)$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	9	6	5	6	9	4	1
3	8	7	4	5	6	3	2	9
4	6	1	6	5	6	1	6	1

Észrevesszük, hogy a kifejezés mindenik elemének utolsó számjegye a táblázat értékei közül kerül ki. Például $u(1286^{1997}) = u(6^{1997}) = 6$. Továbbá észrevesszük, hogy minden esetben maximum négy különböző értéket vehet fel az $u(c^k)$, $c \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, 9\}$ függvény.
Ebből kiindulva, és figyelembe véve, hogy 1997=4·499+1, következik, hogy $u(E)=u(1+2+3+\ldots1997)=u(\frac{1997\cdot 1998}{2})$ =8, ami nem lehet egy négyzetszám utolsó eleme.□

3) Adjuk meg az E = $1\cdot 3\cdot 5\cdot 7+3\cdot 5\cdot 7\cdot 9+\ldots+95\cdot 97\cdot 99\cdot 101$ utolsó számjegyét.
Megoldás: Elsősorban arra vagyunk kíváncsiak, hogy pontosan hány szorzatból tevődik össze a kifejezés. Észrevesszük, hogy mindenik négyelemű szorzat páratlan számmal kezdődik: 1, 3, 5, … stb. A páratlan számok általános alakja legyen ebben az esetben $p=2\cdot k-1$. Ha $k=1$, akkor $p=1$, $k=2$, akkor $p=3$, stb. így megtudhatjuk, hogy pontosan hány szorzatunk van, hiszen a $2\cdot k-1=95$ egyenletből kapjuk, hogy $k=48$, tehát *48* szorzatunk van. A továbbiakban észrevesszük, hogy a szorzatok ötösével csoportosíthatók az utolsó számjegy szerint. Legyen:

$e_1 = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \quad \Rightarrow u(e_1)=5$
$e_2 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \quad \Rightarrow u(e_2)=5$
$e_3 = 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \quad \Rightarrow u(e_3)=5$
$e_4 = 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \quad \Rightarrow u(e_4)=9$
$e_5 = 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \quad \Rightarrow u(e_5)=5$

Egy ilyen ötös csoport utolsó számjegye:

$$u(u(e_1)+ u(e_2)+ u(e_3)+ u(e_4)+ u(e_5))=u(5 + 5 + 5 + 9 + 5)=9$$

Mivel $48=9\cdot 5 + 3$, így pontosan kilenc ilyen ötös csoportunk van, ezek utolsó számjegye

$u(9 \cdot 9) =1$. A továbbiakban az utolsó három csoport utolsó számjegyét kell megkeresnünk. Az utolsó három szorzat-csoport rendre: $91\cdot 93\cdot 95\cdot 97$, $93\cdot 95\cdot 97\cdot 99$ és $95\cdot 97\cdot 99\cdot 101$. A szorzatok mindenikében szerepel egy öttel végződő szám, így mindhárom szorzat öttel fog végződni (nullával természetesen nem végződhet egyik sem, mivel nincs páros szám a szorzatokban), összegük pedig szintén öttel fog végződni: $u(5 + 5 + 5) = 5$, tehát a keresett szám $u(1+5)=6$.□

4) Hány olyan négyzetszám van, mely 25-tel osztva 12-t ad maradékul?
Megoldás: Tételezzük fel, hogy van olyan $n\in \mathbb{N}$ szám, amelyre $n^2=25\cdot q+12$. Ekkor $n^2-12=25q$. Az egyenlőség jobb oldala utolsó számjegye 5 vagy 0, továbbá $u(n^2) \in\{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$, így $u(n^2-12) \in \{2,3,4,7,8,9\}$, és 0 vagy 5 $\notin \{2,3,4,7,8,9\}$. Tehát nincs olyan négyzetszám, amelyet 25-tel osztva 12-t kapunk maradékul.□

5) Miért nem négyzetszám a $10^{10}+5$ szám
Megoldás: Az $n = 10^{10}+5$ osztható 3-mal, hiszen 1+5 = 6, tehát ahhoz, hogy négyzetszám legyen osztható kellene, legyen 9-cel, ami viszont nem igaz, hiszen 5+1=6 nem osztható kilenccel, így a 3. megállapítást felhasználva n nem négyzetszám.

6) Van-e olyan négyzetszám, amelynek négyzete így írható $n = 1999^{2000}+1$?
Megoldás: $u(1999^{2000})=1$, így $u(1999^{2000}+1)=2$, így az n szám nem lehet négyzetszám.

7) Lehet-e négyzetszám az $n = 1998^{12}+2$?
Megoldás: Tekintsük az 1998 számot, amely osztható 3-mal. Így 1998^{12} szintén osztható hárommal. Az $n = 1998^{12}+2$ számnak a 3-mal való osztási maradéka 2, tehát az n szám nem lehet négyzetszám.

8) Felírható-e az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számsorozat egy olyan sorrendben, hogy a keletkező hatjegyű szám négyzetszám legyen?
Megoldás: A számsorozatot $6!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6=720$ számot eredményezne, mindegyikéből nem vonhatunk gyököt! Tekintsük viszont a számjegyek összegét: 1+2+3+4+5+6=21, így az új szám biztosan osztható 3-mal, viszont a 9-cel nem osztható, ami ellentmond a 3. megállapításnak!

9) Négyzet szám-e az $1\underbrace{444\ldots444}_{99 \text{ db } 4\text{-es}}$.

Megoldás: $1444\ldots444 = 4 \cdot 36\underbrace{111\ldots111}_{97 \text{ db } 1\text{-es}}$. A szorzat második tényezője nem lehet négyzetszám, mivel a 36111…111 szám néggyel való osztási maradéka 3 (az 1 megállapítást használtuk).

10) Lehet-e két páratlan természetes szám négyzetének összege is egy négyzetszám?
Megoldás: A két természetes páratlan számot, p_1 és p_2, felírhatjuk a következő alakban: $p_1 = 2\cdot k+1$ és $p_2 = 2\cdot k'+1$, így $p_1^2+p_2^2=4(k^2 + k + k'^2 + k' + 2) + 2$, mely szám néggyel osztva kettőt ad maradéknak, tehát $p_1^2+p_2^2$ nem lehet négyzetszám.□

11) Lehet-e négy egymást követő természetes szám természetes szám négyzetének összege négyzetszám?
Megoldás: A négy egymást követő természetes szám legyen k, k+1, k+2, k+3, így $k+(k+1)^2+(k+2)^2+(k+3)^2=4\cdot(k^2+3\cdot k+3)+2$, amely szám néggyel osztva kettőt ad maradéknak, tehát az összeg nem lehet négyzetszám.□

5.13 SZÁMRENDSZEREK

Az általunk használt számrendszer a 10-es számrendszer. Ez azt jelenti, hogy tíz egységet (egyest, tízest, százast, ezrest, stb.) foglalunk egy-egy magasabb egységbe (tíz egyest tízesbe, tíz tízest százasba, és így tovább). A tízes számrendszerben felírt számok lehetséges számjegyei a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. A számokat helyiértékes írásmódban írjuk fel, ami azt jelenti, hogy jobbról balra haladva a számjegyek az egyesek számát, a tízesek számát, a százasok számát, stb. adjuk meg. Például a 12306 szám 1 tízezresből, 2 ezresből, 3 százasból, 0 tízesből és 6 egyesből áll, azaz:

$$12306 = 1\cdot10^4+2\cdot10^3+3\cdot10^2+0\cdot10^1+6\cdot10^0.$$

Általában egy $n \in \mathbb{N}$ szám a következőképpen írható fel általános alakban, 10 hatványainak segítségével:

$$n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \cdots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0.$$

Az általános alakból kiindulva, könnyen belátható, hogy a 10 alapot bármilyen más *b* alappal felcserélhetjük. Ebben az esetben a *b* számrendszer számjegyei a {*0, 1, 2,…,(b-1)*} halmazból kerülnek ki. Amennyiben *b*>10, úgy a 11, 12 stb. számoknak megfelelő jelölést kell biztosítani. Tizenhatos számrendszer számjegykészlete a {0, 1, 2 ,3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, *A, B, C, D, E, F*} halmaz elemeiből kerül ki. Egy adott *b* számrendszerben egy $n \in \mathbb{N}$ szám a következőképpen írható fel általános alakban:

$$n = a_p \cdot b^p + a_{p-1} \cdot b^{p-1} + \cdots + a_1 \cdot b^1 + a_0 \cdot b^0.$$

Például:

$$(31248)_{10}=(75020)_8=(160050)_7=(111101000010000)_2=(7A10)_{16}, \text{ mivel:}$$

$$31248 = 7\cdot 8^4+5\cdot 8^3+0\cdot 8^2+2\cdot 8^1+0\cdot 8^0 = 1\cdot 7^5+6\cdot 7^4+0\cdot 7^3+0\cdot 7^2+5\cdot 7^1+0\cdot 7^0 = 7\cdot 16^3+10\cdot 16^2+1\cdot 16^1+0\cdot 16^0.$$

A 31248 szám kifejtését a kettes számrendszerben az olvasóra bízzuk.

Feltevődik a kérdés, hogyan írunk át egy számot a tízes számrendszerből egy adott *b* számrendszerbe. Az alábbi négy példával szemléltetjük a módszert, amelyet azonban nem fogunk bizonyítani:

5.14 MEGOLDOTT FELADATOK

1) Írjuk fel a 31248 számot a 7 és 16 számrendszerekben.

Megoldás

$$\begin{aligned}
31248 &= 4464 \times 7 + 0 &\Rightarrow a_0 = 0\\
4464 &= 637 \times 7 + 5 &\Rightarrow a_1 = 5\\
637 &= 91 \times 7 + 0 &\Rightarrow a_2 = 0\\
91 &= 13 \times 7 + 0 &\Rightarrow a_3 = 0\\
13 &= 1 \times 7 + 6 &\Rightarrow a_4 = 6\\
1 &= 0 \times 7 + 1 &\Rightarrow a_5 = 1
\end{aligned}$$

Tehát: $(31248)_{10}=(160050)_7$

$$\begin{aligned}
31248 &= 1953 \times 16 + 0 &\Rightarrow a_0 = 0\\
1953 &= 122 \times 16 + 1 &\Rightarrow a_1 = 1\\
122 &= 7 \times 16 + 10\ (A) &\Rightarrow a_2 = A\\
7 &= 0 \times 16 + 7 &\Rightarrow a_3 = 7
\end{aligned}$$

Tehát: $(31248)_{10}=(7A10)_{16}$

Megfigyelhető, hogy az eredeti számot addig osztjuk az új alappal, amíg a hányados 0 lesz. Minden lépéskor az új osztandó az előtte lévő lépés hányadosa lesz. Minden lépés maradéka az új számrendszerben felírt szám egy-egy újabb számjegye lesz.

A számrendszerek már az emberi kultúra hajnalán megjelentek, Tudjuk, hogy a babiloniak a 60 alapú számrendszert használták, de az is közismert, hogy a franciák a 80 és 100 közötti számok esetében a húszas alapú számrendszert használják:

80 = *quatre-vingts* - négyszer húsz,

88 = *quatre-vingt hiut* - négyszer húsz (és) nyolc,

90 = *quatre-vingt-dix* - négyszer húsz (és) tíz.

Érdekes, hogy a dán nyelv is örzi a huszas számrendszer nyomait[2]:

3 = *tre,*

60 = *tres* – a harmadik huszas csoport, tulajdonképpen 3 × 20 = 60,

61= *enogtres* – egy és(*og*) a harmadik huszas csoport , azaz 1 + 3 × 20 = 61,

4 = *fire,*

80 = *firs* – a negyedik huszas csoport,

82 = *toogfirs* – kettő és(*og*) a negyedik huszas csoport , azaz 2 + 4 × 20 = 82.

Felvetődik a kérdés: hogyan változik a számjegyek száma, ha egy új számrendszerre térünk át. Meg szeretnénk becsülni az új számrendszerben hány számjegyből állíthatjuk elő az adott számot. A kérdés megválaszolására tekintsük az N = 10^n-1 számot:

$$10^n - 1 = 99\ldots9,$$

– amely n darab 9 számjegyből áll. Amennyiben ezt a számot egy *b* alapú számrendszerben akarjuk felírni, akkor egy *m* számot kell meghatározni, amelyre :

$$b^{m-1} \leq 10^n - 1 < b^m, \text{ ahonnan}$$

$$b^{m-1} < 10^n \leq b^m.$$

A továbbiakban az egyenlőtlenségekben szereplő három szám tíszes alapú logaritmusát vesszük, és figyelembe vesszük, hogy lg10=1[3].

$$(m-1) \cdot \lg b < n \leq m \cdot \lg b.$$

Az egyenlőtlenségeket lgb –vel elosztva, kapjuk, hogy :

$$m - 1 < \frac{n}{\lg b} \leq m,$$

így m az első egész szám, amely nagyobb, mint $\frac{n}{lgb}$. Megjegyezzük, hogy ez egy becsült érték, amely megegyezhet a valós, számított értékkel, de akár különbözhet is 1,2 vagy akár 3 egységgel is.

Példa: Becsüljük meg, hány számjegyű szám lesz a 2-es számrendszerben a $(2017)_{10}$ szám?

[2] A szerző nem tud dánul és franciául sem. A `translate.google.com` viszont nagy segítség ilyen esetekben…

[3] Legyen *a* egy 1-től különböző pozitív szám és *x* egy tetszőleges valós szám. Akkor létezik egyetlen y valós szám amelyre $a^y = x.$ Az y számot az x szám a-alapú logaritmusának nevezzük, és $\log_a x$-szel jelöljük. Tehát $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$. Például $\log_2 32 = 5$ mivel $2^5 = 32$ és $\log_2 \frac{1}{4} = -2$, mivel $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$. A $\log_2$ -t kettes alapú logaritmusnak nevezzük. A tízes alapú logaritmust lg-vel kelöljük.

Megoldás: a telefonunkon lévő számológéppel kiszámoljuk a *lg2* értékét: 0.30103... A 2017-nek négy számjegye van, így $\frac{4}{0.30103} = 13.28771$ ....

Így *a* **becsült** *érték 14, a* **valódi** *érték: 11,* hiszen $(2017)_{10}=(11111100001)_2$.□

2) Határozzuk meg az ismeretlen számrendszert úgy, hogy az egyenlőség igaz legyen:

$$3001_{(x)} = 1424_{(6)}$$

Megoldás: $3001_{(x)}=3\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x^1+1\cdot x^0$, továbbá $1424_{(6)}=1\cdot 6^3+4\cdot 6^2+2\cdot 6^1+4\cdot 6^0$. Innen kapjuk, hogy $3\cdot x^3=375\Rightarrow x^3=125=5^3\Rightarrow x=5$ □.

3) Határozzuk meg az ismeretlen számrendszert úgy, hogy az egyenlőség igaz legyen:

$$21_{(x)} + \overline{xx}_5 = 61_{(8)}$$

Megoldás: A számításokat elvégezve kapjuk, hogy $8x = 48 \Rightarrow x = 6$ □.

4) Határozzuk meg az $\overline{abc}_{10}$ számot, ha $\overline{abc1} + \overline{abc} = 2003$

$$\frac{\begin{array}{r}\overline{abc1}+\\ \overline{abc}\end{array}}{2003} \Longrightarrow u(c+1)=3 \Longrightarrow c=2 \Longrightarrow \frac{\begin{array}{r}\overline{ab21}+\\ \overline{ab2}\end{array}}{2003} \Longrightarrow u(2+b)=0 \Longrightarrow b=8 \Longrightarrow \frac{\begin{array}{r}\overline{a821}+\\ \overline{a82}\end{array}}{2003} \Longrightarrow u(1+8+a)=0 \Longrightarrow a=1$$

Tehát a keresett szám $\overline{abc}_{10} = 182$.□

5) Határozzuk meg az $\overline{abc}$ számot, ha $\overline{aa} + \overline{bb} + \overline{cc} = \overline{abc}$

Megoldás:

$$\frac{\begin{array}{r}\overline{aa}\ +\\ \overline{bb}\\ \overline{cc}\end{array}}{\overline{abc}} \Rightarrow a+b=10 \text{ és } c+1=b \Rightarrow a=1,\ b=9 \text{ és } c=8 \Rightarrow 11+99+88=198$$ □.

6) Adjuk meg azt a négy számjegyből álló számot, amely 7812-vel kisebb a fordítottjánál, és az összeg esetében a százasok száma a keresett szám esetében megegyezik az egyesek számával.

Megoldás:

$$\frac{\begin{array}{r}\overline{abcd}+\\ 7812\end{array}}{\overline{bcba}}$$

Az ezresek számát figyelembe véve megállapítjuk, hogy $a \in \{1,2\}$, hiszen ha a nagyobb lenne, akkor az eredmény az ötjegyű szám lenne. Feltételezzük, hogy a = 1, így azt kapjuk, hogy:

$$\frac{\begin{array}{r}\overline{1bcd}+\\ 7812\end{array}}{\overline{bcb1}} \Rightarrow d = 9 \Rightarrow \frac{\begin{array}{r}\overline{1bc9}+\\ 7812\end{array}}{\overline{bcb1}} \Rightarrow u(c+2)=b \text{ és } u(b+8)=c \Rightarrow b = 9 \text{ és } c = 7.$$

A keresett szám 1979.

Az a = 2 eset tárgyalását az olvasóra bízzuk.

7) Adjuk meg az összes $\overline{54xy}$ alakú számot, ha tudjuk, hogy a szám osztható 6-tal.
Megoldás: ha egy szám osztható 6-tal úgy osztható 2-vel és 3-mal. Tehát y ∈ {0, 2, 4, 6, 8}. A továbbiakban sorra vesszük a lehetséges értékeket: y=0 esetében olyan *x* számjegyeket keresünk, amelyekre az 5+4+*x* szám osztható hárommal. Következoк, hogy *x* ∈ {0, 3, 6, 9} így megkaptuk az 5400, 5403, 5406 és 5409 számokat. A feladat folytatását és befejezését az olvasóra bízzuk.

8) Adjuk meg azokat a különböző számjegyekből álló nem nulla háromjegyű számokat, amelyek a 10-es számrendszerben az összes lehetséges módod felírva, az 1776 számot adják összegül.

Megoldás:

$$\begin{array}{l}\overline{abc}+\\ \overline{acb}\\ \overline{bac}\\ \overline{bca}\\ \overline{cab}\\ \underline{\overline{cba}}\\ 1776\end{array}$$

⇒2(a+b+c)=6 (1 eset), vagy 2(a+b+c)=16 (2 eset), vagy 2(a+b+c)=26 (3 eset).

Az 1. eset természetesen nem lehet megfelelő, hiszen a lehetséges három, egymástól különböző számjegy, amelynek összege = 3 az a {0, 1, 2} halmaznak elemei, ami ellentmond az előzetes feltételeknek. Tekintsük a második esetet, amikor a + b + c = 8. Ebben az esetben a, b, c ∈ {1, 3, 4}, vagy a, b, c ∈ {1, 2, 5}. Valóban: 134 + 431 + 314 + 413 + 143 + 341 = 1776. A második lehetséges számhalmaz kipróbálását az olvasóra bízzuk.
Az olvasó magyarázza meg, miért nem lehetséges a harmadik eset.

9) Határozzuk meg az $\overline{abc}$ számot, ha tudjuk, hogy a $\overline{cba}$-val való osztási hányadosa 5, maradéka 36, továbbá $a - b = 1$.
Megoldás: $\overline{abc} = \mathbf{5} \cdot \overline{cba} + 36$ ⇒$100 \cdot a+10 \cdot b+c=5 \cdot (100 \cdot c+10 \cdot b+a)+36$. Figyelembe véve, hogy $a = b+1$ ⇒ $55 \cdot b+59=499 \cdot c$. ⇒ $b = 8$, $c = 1$, $a = 9$□.

10) Határozzuk meg az összes $\overline{abc}$ alakú számot, ha $1 + 2 + 3 + \ldots + \overline{ab} = \overline{abc}$.
Megoldás: *Gauss* összefüggését használva: $1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, $1 + 2 + 3 + \ldots + \overline{ab} = \frac{\overline{ab} \cdot (\overline{ab}+1)}{2}$$=100 \cdot a+10 \cdot b+c$. ⇒ $\overline{ab} \cdot \left(\overline{ab} + 1\right) =200 \cdot a+20 \cdot b+c = 20 \cdot (10 \cdot a+b)+c= 20 \cdot \overline{ab}+c$. ⇒ $\overline{ab}^2 + \overline{ab} =20 \cdot \overline{ab}+2 \cdot c$⇒ $\overline{ab} \cdot (\overline{ab}-19)=2 \cdot c$. De $0 \leq c \leq 9$ c⇒ $0 \leq \overline{ab} \cdot (\overline{ab}-19) \leq 18$. Két lehetséges esetünk van: $\overline{ab} = 19$ ⇒ $c = u(\frac{19(19+1)}{2})=0$ ⇒ $\overline{abc} \equiv 190$. Az olvasó vizsgálja meg az $\overline{ab} = 19$ esetet.

5.15 KITŰZÖTT FELADATOK

Utolsó számjegy meghatározása

1) Adjuk meg a következő számok utolsó számjegyét: 8^{4k}, 8^{4k+1}, 8^{4k+2},8^{4k+3}.

2) Adjuk meg a következő számok utolsó számjegyét: 2312^{475}, 313^{479}, 14^{573}, 3155^{47}, 256^{1997},517^{753}, 2018^{378}, 15159^{51}

3) Adott az: 1, 3, 7, 15, 31, 63, . . .számsorozat. Adjuk meg az 1997 és 2016 helyen lévő számok utolsó számjegyét.

4) Adjuk meg az 1990^{1996} szám utolsó 1997 számjegyét.

5) Adjuk meg az 1990^{1992} szám utolsó 1993 számjegyét.

6) Határozzuk meg a következő számok utolsó számjegyét:
   a) $1997^{4n+1}+1999^{2n+1}+2001^{n}+2005^{2n}$
   b) $12^{n}+23^{n+1}+34^{n+2}+45^{n+3}$

7) Hány nullában végződnek a következő számok:
   a) $2^{7}\cdot3^{4}\cdot5^{5}\cdot17^{8}$
   b) $35^{2000}\cdot4^{999}\cdot3^{9}$

8) Adjuk meg a kifejezés értékének utolsó számjegyét:
   a) $1\cdot2\cdot3\cdot4...999\cdot1000$
   b) $1\cdot3\cdot5\cdot7...997\cdot999$
   c) $1\cdot2\cdot3\cdot4...999\cdot1000 - 1\cdot2\cdot3\cdot4...999$

9) Adjuk meg a kifejezés értékének utolsó számjegyét:
   a) $a=6+6^{2}+6^{3}+...+6^{1996}$
   b) $b=9+9^{2}+9^{3}+...+9^{1997}$
   c) a+b
   d) a·b

10) Adjuk meg az E kifejezés összeg utolsó számjegét:
    $E = 142^{1}+142^{2}+142^{3}+\ldots+142^{20}$

11) Adjuk meg az E kifejezés összeg utolsó számjegét:
    $E = 111^{111} + 222^{222} + 333^{333} +\ldots+ 999^{999}$

12) Vizsgáljuk meg, hogy az $n=1^{1985}+9^{1986}+8^{1987}+8^{1988}$ osztható-e tízzel?

13) Adjuk meg a kifejezés utolsó számjegyét:
    $E = 1+2^{2}+3^{3}+4^{4}+. . . +10^{10}+\ldots+20^{20}$

Négyzetszámok

1) Határozd meg az $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n+58$ számot úgy, hogy az teljes négyzet legyen!

2) Vizsgáld meg, hogy a 169-et fel lehet-e írni három négyzetszám összegeként?

3) Bizonyítsd be, hogy az $m = 5\cdot(n+1)+6^{n+2}+1001^{n+3}+5$ nem lehet négyzetszám!

4) Vizsgáld meg, hogy az $n = 2^{1999}-2^{1998}-2^{1997}-2^{1996}$ teljes négyzet-e?

5) Miért nem négyzetszám a $10^{100}+10^{50}+1$?

6) Miért nem négyzetszám a $3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \ldots + 3^{100}$

7) Van-e olyan természetes szám, amelynek négyzete az
$1+1\cdot2+1\cdot2\cdot3+1\cdot2\cdot3\cdot4+\ldots+1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot13\cdot14\cdot15$ szám?
(Másképpen: az $1!+2!+3!+\ldots+15!$ négyzetszám-e?)

8) Határozzuk meg az $\overline{ab}$ számot úgy, hogy az $\overline{ab} + \overline{ba}$ szám teljes négyzet legyen.

9) Határozzuk meg az $\overline{abc}$ számot úgy, hogy $a<b<c$ és az $\overline{ab} + \overline{ba} + \overline{ac} + \overline{ca} + \overline{bc} + \overline{cb}$ szám teljes négyzet legyen.

10) Vizsgáljuk meg a kijelentés igazságértékét: *Az n^2+17 szám lehet teljes négyzet!*

11) Mutassuk meg, hogy a következő számok teljes négyzetek:
   a. $N = 1997 +2(1+2+3+...+1996)$
   b. $P = 1+ 3+ 5+ ...+1997$
   c. Általánosítás

12) Mutassuk meg, hogy a következő számok nem teljes négyzetek
   a. $1997^1+1997^2+1997^3+1997^4+1997^5$
   b. $1990+1991^1+1992^2+1993^3+1994^4+1995^5+1996^6+1997^7$
   c. $5 \cdot 2^n+3$
   d. $1^{1997}+2^{1997}+3^{1997}+...1997^{1997}$
   e. $1^{2006}+2^{2006}+3^{2006}+...+2005^{2006}+2006^{2006}+2007$
   f. $1 + 7 + 7^2 + 7^3 + \ldots + 7^{2014}$

13) Határozzuk meg az $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ...\cdot n + 58$ számot úgy, hogy az teljes négyzet legyen.

14) Vizsgáljuk meg, hogy az $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ...\cdot 2002 + 2003$ teljes négyzet-e?

15) Mutassuk meg, hogy az $\overline{aaa}$ szám nem lehet teljes négyzet.

16) Mutassuk meg, hogy az 1+3+5+7+...+2005 teljes négyzet.
17) Mutassuk meg, hogy az y szám nem lehet teljes négyzet, ahol $y-12 = 4\cdot(5 + 5^2 + 5^3 + ... + 5^n)$
18) Vizsgáld meg, hogy a $111+222^2+333^3+444^4+555^5-12345$ szám teljes négyzet-e?

19) Mutassuk meg, hogy az 1+ 3 + 5 +... + 999 szám teljes négyzet!

20) Mutassuk meg, hogy $2005 + 2\cdot(1+2+3+. ..+2004)$ teljes négyzet.

21) Mutassuk meg, hogy az $\overline{abc} + \overline{cba}$ alakú számok nem lehetnek teljes négyzetek. (a≠b≠c).

22) Vizsgáld meg, hogy a $1+2^0+2^1+2^2+2^3 + . . .+ 2^{2001}$ szám teljes négyzet-e?

23) Vizsgáld meg, hogy a $1^2+2^2+3^2+...+56^2$ szám teljes négyzet-e?

24) Mutassuk meg, hogy az:

$$1+3+5+\ldots+999$$

egy teljes négyzet. Adjuk meg ezt a számot!

25) Mutassuk meg, hogy 2005 + 2(1+2+3+…+2004) egy szám teljes négyzete. Adjuk meg ezt a számot!

26) Lehet-e négyzetszám az $n = 172^{1996} + 7$.

27) Egy szám számjegyeinek összege 1995. Lehet-e ez a szám négyzetszám?

28) Adott a következő szám: $\underbrace{11\ldots1}_{\text{28 darab 1-es}}1100011$. Lehet-e ez a szám négyzetszám?

29) Négyzetszám-e a $2\cdot(3+3^2+3^3+. . . +3^{2003})+3$?

30) Vizsgáljuk meg, hogy öt egymást követő természetes szám négyzetének összege lehet-e négyzetszám?

31) Vizsgáljuk meg, hogy hat egymást követő természetes szám négyzetének összege lehet-e négyzetszám?

Maradékos osztás

1) Adjuk meg az összes, legtöbb háromjegyű, természetes számot, amelyet 32-vel osztva a maradék 6.
2) Adjuk meg azokat a természetes számokat, amelyeknek a 7-tel való osztásukkor a hányados 3-mal nagyobb, mint a maradék.

3) Adjuk meg azt a legkisebb négyjegyű számot, amelyet 23-mal osztva, 15 a maradék.

4) Adjuk meg azt a legnagyobb háromjegyű számot, amelyet 12-vel osztva, a maradék 5.

5) Adjuk meg azt a legkisebb természetes számot, amelyet 320-szal osztva, a hányados egy páratlan szám, a maradék 83.

6) Adjuk meg az összes természetes számot, amelyet 4-gyel osztva, a maradék 24.

7) Adjuk meg az összes természetes számot, amelyet 6-tal osztva, a maradék 32.

8) Adjuk meg az összes természetes számot, amelyek 5-tel osztva, a hányados egyenlő a maradékkal.

9) Adjuk meg az összes természetes számot, amelyet 4-gyel osztva, a hányados 34-szer nagyobb a maradéknál.

10) Adjuk meg azokat a négyjegyű számokat, amelyeket 83-mal osztva, a maradék 54.

11) Adjuk meg az összes 200-nál kisebb számot, amelyet 26-tal osztva, a maradék négyszer kisebb a hányadosnál.

12) Határozzuk meg azt a három természetes számot, tudva azt, hogy a második 42-vel nagyobb a harmadiknál, illetve a második számot a harmadikkal osztva, a hányados 6 és a maradék 12, továbbá az első szám a második kétszerese.

13) Két szám összege 105. Adjuk meg a két számot, ha a nagyobbat a kisebbel osztva, a hányados 7 a maradék 9.

14) Egy szám 7-tel nagyobb egy másiknál. Osztási hányadosuk 3, a maradék 2. Melyik ez a két szám?

15) Adjuk meg az összes számot, amelyeket 9-cel osztva, a hányados q a maradék r, 5-tel osztva, a hányados r és a maradék q.

16) Adjuk meg azt a legkisebb illetve legnagyobb háromjegyű számot, amelyeket ugyanazzal a kétjegyű számmal elosztva a maradék 97.

17) Határozzuk meg azokat a természetes számokat, amelyeket 4-gyel osztva a hányados q és a maradék r, illetve 10-zel osztva a hányados r és a maradék q.

18) Adjuk meg az összes, 10.000-nél kisebb számot, amelyet rendre 11-gyel, 13-mal és 19-cel osztva a maradék 7!

19) Adjuk meg azt a legkisebb háromjegyű számot, amelyet 73-mal osztva, a maradék köbét kapjuk hányadosként!

20) Adjuk meg az összes természetes számot az {1000, 1001, 1002,..2000} halmazból, amelyeknek a 217- tel való osztási maradéka egyenlő az osztás hányadosával.

21) Adjuk meg az $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 100 + 999$ szám 440-nel való osztási hányadosát és maradékát.

Útmutatás:

$$999 = 2 \cdot 440 + 119,$$
$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 100 = 440 \cdot (1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 8 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 100),$$
$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 100 + 999 = 440(1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 8 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 100 + 2) + 119.$$

22) Adott az $x = 2^{n+1} \cdot 3^n + 2^n \cdot 3^{n+1} + 19$ szám. Adjuk meg a szám 5-tel való osztási hányadosát és maradékát.

23) Adjuk meg az $n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 100 + 999$ szám 440-nel való osztási hányadosát és maradékát.

24) Adjuk meg az összes $\overline{abc}$ alakú természetes számot, ha tudjuk, hogy 25-tel való osztási maradéka 1, továbbá $\overline{cab}$-nak 26-tal való osztási maradéka 2.

25) Hány olyan természetes szám van, amely $\overline{abab3c}$ alakú alakú, oszthatóak 4-gyel és $\overline{ab}$ teljes négyzet.

26) Adjuk meg az összes $\overline{abc}$ alakú számot, amelynek a $\overline{bc}$ számmal való osztási hányadosa 4, a maradék pedig: $\overline{bc}$ - 8.

Számrendszerek

1) Határozzuk meg az *a* és *b* számjegyeket, hogy az egyenlőség igaz legyen:

$$\overline{2a4} = \overline{1b3}.$$

2) Határozzuk meg az ismeretlen számrendszereket úgy, hogy az egyenlőség igaz legyen:
   a. $405_{(x)} = 149_{(10)};$
   b. $152_{(x+4)} = 200_{(8)};$
   c. $23_{(x)} + 45_{(y)} = 40_{(10)};$
   d. $22_{(x)} + \overline{xxx}_{(4)} = 241_{(5)}.$

3) Határozzuk meg az a számjegyet úgy, hogy a kifejezés igaz legyen:
$$9 \cdot (\overline{aa}:5 - 17:5) = 108!$$

4) Határozzuk meg az összes $\overline{ab}_{10}$ alakú számot úgy, hogy $\overline{ab} = a \cdot b + a + b$.

5) Határozzuk meg x-et, ha $12_{(x)} + 34_{(x)} + 56_{(x)} = 124_8$.

6) Keressünk olyan az $\overline{ab}$ alakú számokat a tízes számrendszerben, ha tudjuk, hogy $\overline{ab}_{10} = \overline{ba}_7$.

7) Keressünk olyan az $\overline{ab}$ alakú számokat a tízes számrendszerben, ha tudjuk, hogy $\overline{ab}_{10} = \overline{ba}_5$.

8) Határozzuk meg az x és y természetes számokat, ha
$$12_{(x)}+34_{(y)}=41_{(7)}$$
$$23_{(x)}+45_{(y)}=52_8$$

9) Határozzuk meg az x és y természetes számokat, ha
$$14_{(x)}+12_{(y)}=14_{10}$$
$$23_{(x)}-21_{(y)}=11_5.$$

10) Határozzuk meg az a,b és c számjegyeket, ha $\overline{abcc} + \overline{cb} = 1993!$

11) Határozzuk meg az $\overline{abc}$ számot, ha tudjuk, hogy a szám $\overline{bc}$-vel való osztási hányadosa 6 , a maradék 5.

12) Azt mondjuk, hogy az $\overline{abc}$ szám "*párja*" az $\overline{xyz}$ számnak, ha $a + x = b + y = c + z = 10$. Határozzuk meg az $\overline{abc}$ számot, ha a "*párjával*" való osztási hányadosa 3 és a maradék 14.

13) Határozzuk meg az $\overline{abc}$ számokat, ha tudjuk, hogy $\overline{bc}$ –vel osztva a maradék és a hányados egyaránt 18.

14) Határozzuk meg x-et és y-t ha $23_{(x)} + 42_{(y)} = 43_{10}$!

15) Határozzuk meg az $x \neq y$, $x \neq z$ és $y \neq z$ számjegyeket, tudjuk, hogy $\overline{xx} + \overline{yx} + \overline{zx} = \overline{xy3}$

16) Határozzuk meg azokat az $\overline{abc}$ alakú számokat, amelyekre igaz a : $\overline{2abc} + \overline{bc} = 2016 + \overline{ab0}$ öszefüggés.

17) Határozzuk meg az összes $\overline{ab}$ alakú $a<b$ számot, ha tudjuk, hogy $\overline{ab} + \overline{ba} = 143$.

18) Határozzuk meg az összes $\overline{xy}$ alakú , ha tudjuk, hogy $\overline{x3y} - \overline{y2x} = 109$.

19) Határozzuk meg az összes $\overline{abc}$ alakú számot, ha $a \neq b$, $a \neq c, b \neq c$, és tudjuk, hogy
$$\overline{aaa} + \overline{bbb} + \overline{ccc} + a + b + c = 2016.$$

20) Határozzuk meg az összes $\overline{abc}$ alakú számot, amennyiben $4\cdot(\overline{ab} + \overline{ba}) + 6^c = 221$. $a, b, c \in \{0, 1, \ldots 9\}$.

21) Határozzuk meg az x és y számjegyeket, ha $\overline{xy7} + 3 \cdot \overline{4xy} = 2143$.

22) Határozzuk meg az összes $\overline{abc}$ alakú számot, ha $\overline{ab} + \overline{bc} = \overline{ca} + 45$.

Oszthatóság

1) Vizsgáljuk meg, hogy az $\overline{xyzxyz}$ alakú szám osztható-e 91-gyel?

2) Adjuk meg az összes $\overline{4a2a3a}$ számot, amely:
   a) Osztható 5-tel
   b) Osztható 10-zel

3) Vizsgáljuk meg, hogy a $2^{4n+1}+3$ osztható-e 5-tel?

4) Vizsgáljuk meg, hogy a $15\cdot46^n-4\cdot13^n$ páros szám-e?

5) Vizsgáljuk meg, hogy 46^n-13^n osztható-e 2-vel?

6) Vizsgáljuk meg, hogy 46^n-13^n osztható-e 3-mal

7) Határozzuk meg az összes $\overline{30ab}$ alakú 24-gyel osztható számot.

8) Határozzuk meg az összes $\overline{21a5b}$ alakú 75-tel osztható számot.

9) Mutassuk meg, hogy két egymás következő természetes szám összege nem osztható 2-vel.

10) Mutassuk meg, hogy három egymásután következő természetes szám összege osztható hárommal.

11) Mutassuk meg, hogy négy egymásután következő természetes szám összege nem osztható néggyel.

12) Mutassuk meg, hogy négy egymásután következő természetes szám szorzata osztható nyolccal.

13) Mutassuk meg, hogy k darab egymásután következő természetes szám szorzata osztható k-val.

14) Határozzuk meg az összes $\overline{abb}$ alakú, 5-tel osztható számot, amely szám számjegyeinek összege:
   a) 9
   b) 19
   c) 27

15) Határozzuk meg az összes $\overline{aab}$ alakú, 2- tel osztható számot, amely szám számjegyeinek összege:
   a) 10
   b) 16
   c) 21

16) Mutassuk meg, hogy hat egymásután következő számból egy biztosan osztható 5-tel!

17) Adott az $\overline{a_1a_2a_3 \dots a_kxyz}$ szám, ahol a_1, a_2,... a_k tetszőleges számjegyek, $\overline{xyz}$ szám pedig osztható 8-cal. Mutassuk meg, hogy $\overline{a_1a_2a_3 \dots a_kxyz}$ is osztható 8-cal.

18) Fordítva: ha az $\overline{a_1a_2a_3 \dots a_kxyz}$ szám osztható 8-cal, akkor az $\overline{xyz}$ szám is osztható 8-cal.

19) Adjuk meg az összes $\overline{1a4a}$ alakú számot, amely osztható 8-cal.

20) Mutassuk meg, hogy az $\overline{37a} + \overline{7a3} + \overline{a37}$ összeg osztható 37-tel, függetlenül az a nemnulla számjegytől

21) Vizsgáljuk meg, hogy a következő kifejezések oszthatóak-e 5-tel? Hát 6-tal?

   a) $E_1 = 1 + 3 + 5 + \dots 51$,
   b) $E_2 = 1 + 4 + 7 + \dots + 148$,
   c) $E_3 = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{2013}$,
   d) $E_4 = 1 + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2013}$.

22) Adjuk meg az összes $\overline{abab}$ alakú 12-vel osztható számot.

23) Adjuk meg a legkisebb $\overline{abab}$ alakú számot, amely osztható 4-gyel, 5-tel és 9-cel, továbbá $a + b = c$.

24) Bizonyítsd be, hogy ha egy tetszőleges háromjegyű számot kétszer egymás után írsz, akkor az így kapott hatjegyű szám osztható lesz 13-mal! (például: 134⇒ 134134)

25) Hány $\overline{abca}$ alakú szám osztható 13-mal?

26) Keressük meg azt a legnagyobb természetes számot, amit ha 47-tel osztunk, a hányados a maradék háromszorosa lesz.

27) Az összes háromjegyű, 900-nál nagyobb számot elosztjuk 91-gyel. Határozzuk meg a maradékok összegét.

28) Mutassuk meg, hogy $\forall n \in \mathbb{N}$, a $p = 7 \cdot n^4 - 99$ nem osztható 5-tel.

29) Mutassuk meg, hogy az $n = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ szám osztható 37-tel.

Vegyes feladatok

1) Adott az N = $2+2^2+2^3+...+2^{2007}$ szám. Vizsgáljuk meg, hogy az N+2 szám felírható-e 2 egy hatványaként?

2) Legyen N = $2+2^2+2^3+2^4+\ldots+2^{2007}$. Adjuk meg az N+2 számot a 2 egy hatványaként!

3) Vizsgáld meg, hogy a $3+3^2+3^3+3^4+3^5+3^6$ egy páros szám-e?

4) Határozd meg az $\overline{abc}$ szám háromszorozát, ha tudjuk, hogy $4 \cdot a = 84$, $2 \cdot b = 20$ és $c = (a + b):2$.

5) Tudjuk, hogy $\overline{2938d}$ - $\overline{ab37c}$ = 1. Adjuk meg az $a+b+c+d$ összeget!

6) Legyen egy $\overline{abcd}$ természetes szám. Azt mondjuk, hogy ez a szám „*kétszerezett szám”*, ha a $\overline{cd}$ szám az $\overline{ab}$ szám kétszerese.
   a) Adjuk meg a legkisebb *kétszerezett számot*;
   b) Adjuk meg a legnagyobb "*kétszerezett szám*" számjegyeinek összegét;
   c) Ha k egy "*kétszerezett szám*", és $\overline{ab} + \overline{cd} = 72$, határozzuk meg a k számot.

7) Határozzuk meg az $\overline{abac}$ számot, ha tudjuk, hogy $a + b + a + c = \overline{ac}$.

8) Határozzuk meg az összes $\overline{ab}$ alakú szám öszegét, ha tudjuk, hogy $\overline{ab} + \overline{ba} = 110$.

9) Határozzuk meg az összes $\overline{abca}$ számot, ha tudjuk, hogy $3 \cdot \overline{ab} = 5 \cdot \overline{ca}$.

10) Határozzuk meg az $\overline{abab}$ alakú szám 11-gyel való osztási maradékát.

11) Adjuk meg az n = $(2^{98}+2^{102})\cdot(5^{99}+5^{101})$ szám számjegyeinek összegét.

12) Egy négy számjegyű természetes számot $\overline{abcd}$-t „*különlegesnek*” nevezünk, ha $2 \cdot (a + b + c) = d$.
   a) Bizonyítsuk be, hogy egyetlen *különleges szám* sem osztható 5-tel.
   b) Bizonyítsuk be, hogy mindenik *különleges szám* osztható 3-mal.
   c) Határozzuk meg az összes *különleges számot*.

13) Mutassuk meg, hogy bármely x, y számjegyekre az $n = \overline{x0y} + \overline{y0x}$ szám biztosan nem prím.

14) Adott az $A = \{1006, 1007, 1008,\ldots,3016\}$ halmaz.

a) Adjuk meg a |A|-t.
b) Mutassuk meg, hogy az A halmaz elemeinek összege egy teljes négyzet.
c) Adjuk meg az A halmaz elemeinek a 8-cal való osztási maradékainak összegét.

15) Adott az $112222333333\ldots\underbrace{1111..11}_{\text{11-es 22-szer}}$ szám. Hány számjegye van az A számnak? Hányszor használtuk az 1-es számjegyet az A szám felírásában? Melyik számjegy van a 101 helyen?

16) Adott az $A = \{3^n+9^n \mid n\in \mathbb{N}\}$

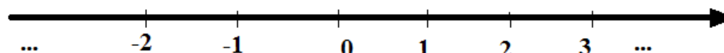
a) Mutassuk meg, hogy $2^{2017}\notin A$
b) Mutassuk meg, hogy az A halmaz nem tartalmaz négyzetszámokat

6. AZ EGÉSZ, A RACIONÁLIS ÉS A VALÓS SZÁMOK HALMAZA

Az egész számok halmaza a természetes számok halmazának egy bővítése: a természetes számokat a negatív egész számokkal bővítjük.
A negatív számokhoz a kivonás műveletén keresztül jutunk el. Tekintsük a következő egyenletet:

$$a + x = 0,\ a \in \mathbb{N}^*.$$

A *0*-nál nagyobb a természetes szám *negatívjának* nevezzük, és $-a$-val jelöljük a fenti egyenlet megoldását. Tehát: a + $(-\ a)$ = *0*. Megjegyezzük, hogy a $-a$ számot az a szám ellentettjének is nevezzük. A $(-\ a)$ szám az a szám negatívja. Az összes természetes szám negatív párjával, *negatívjával*, együtt az *egész számok halmazát* alkotja. A nullánál nagyobb egész számok a pozitív egész számok, a nullánál kisebb számok a negatív egész számok. Általában egy pozitív egész számok ellentettje annak a negatív párja, amely szintén egész szám. A *0*-t nem soroljuk sem a pozitív sem a negatív egész számok közé. Az egész számok halmazát a $\mathbb{Z}$-vel (*zahlen* - német) jelöljük.
A számok a számegyenesen az ábra szerint helyezkednek el.



Az a egész szám abszolút értéket a következőképpen értelmezzük:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

Ezek szerint $|-12|$=12, |6|=6, stb. Két negatív szám közül az a kisebb, amelyiknek az abszolút értéke nagyobb: $-7 < -5$ mivel $|-7| = 7 > |-5| = 5$.

Műveletek az egész számok halmazán

Összeadás $(a, b \in \mathbb{N})$:

$$(+a) + (+b) = +(a + b);$$
$$(-a) + (-b) = -(a + b);$$
$$(+a) + (-b) = +(a - b), a > b;$$
$$(+a) + (-b) = -(b - a), b > a;$$
$$(-a) + (+b) = -(a - b), a > b;$$
$$(-a) + (+b) = +(b - a), b > a;$$
$$(+a) + (-b) = 0 \Leftrightarrow a = b;$$
$$(+a) + 0 = a;$$
$$(-a) + 0 = -a;$$

Kivonás:

$$(+a) - (+b) = (+a) + (-b);$$
$$(+a) - (-b) = (+a) + (+b);$$
$$(-a) - (+b) = (-a) + (-b);$$
$$(-a) - (-b) = (-a) + (+b);$$

A kivonást úgy végezzük el, hogy a kivonandót ellenkező előjellel a kisebbítendőhöz hozzáadjuk.

Szorzás:

$$(+a) \cdot (+b) = a \cdot b\ ;$$
$$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b\ ;$$

$$(+a) \cdot (-b) = -a \cdot b\ ;$$
$$(-a) \cdot (+b) = -a \cdot b\ ;$$
$$(-a) \cdot 0 = 0 \cdot (-a) = 0\ ;$$

Az egész számok halmazán érvényben marad a kommutativitás, az asszociativitás és a disztributivitás. Azt mondjuk, hogy az egész számok halmaza az összeadásra, kivonásra és szorzásra nézve zárt, azaz az eredmény szintén az egész számok halmazának az eleme.
Ezzel szemben az osztás az egész számok halmazán nem végezhető el korlátlanul. A $2 \cdot x - 3 = 0$ egyenletnek *nincs megoldása az egész számok halmazán*, nincs olyan egész szám, amely kielégítené a fenti egyenletet.

6.1 A RACIONÁLIS SZÁMOK HALMAZA

Amint láttuk, az egész számok halmazán a műveletek nem mindig végezhetők el. A $bx = a, b \neq 0, a, b \in \mathbb{Z}$, egyenletnek az egész számok halmazán nincs mindig megoldása (az $\frac{a}{b}$ szám nem minden esetben egész szám). Ilyen esetben $\frac{a}{b}$ –t egy új számnak tekintjük. Ezeket a számokat törtszámoknak vagy racionális számoknak nevezzük(*a*: számláló, *b*: nevező). A racionális számok halmazát $\mathbb{Q}$-val (*quotiens* – hányados, latin) jelöljük.

$$\mathbb{Q} = \left\{x | \exists a \in \mathbb{Z} \wedge \exists b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \text{úgy, hogy } x = \frac{a}{b}\right\}.$$

A racionális számok halmaza végtelen halmaz.

Törtek egyenlősége

Két törtet, $\frac{a_1}{b_1}$ és $\frac{a_2}{b_2}$, akkor és csak akkor tekintünk egyenlőnek, ha $a_1 b_2 = a_2 b_1$. Az egyenlőség definíciójából következik a törtek egyszerűsítésének és bővítésének lehetősége. Minden tört addig egyszerűsíthető, ameddig a számlálónak és a nevezőnek van 1-től különböző közös osztója. Mikor az $\frac{a}{b}$ törtnek a legnagyobb közös osztója 1, akkor a törtet *redukált törtnek* nevezzük, az *a* és *b* számot pedig *relatív prímeknek*.

6.2 MŰVELETEK A RACIONÁLIS SZÁMOK HALMAZÁN

Összeadás – Kivonás ($a, b, c, d \in \mathbb{Z}, c \neq 0, d \neq 0$):

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c},$$
$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{d} = \frac{a \cdot d \pm b \cdot c}{c \cdot d}.$$

Szorzás:

$$\frac{a}{c} \cdot b = \frac{a \cdot b}{c},$$
$$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{a \cdot b}{c \cdot d}.$$

Osztás:

$$\frac{a}{c} : b = \frac{a}{b \cdot c},$$
$$\frac{a}{c} : \frac{b}{d} = \frac{a \cdot d}{c \cdot b}.$$

A $\mathbb{Q}$ halmaz mind a négy alapműveletre zárt, kivéve a 0-val való osztást.
Egy $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ racionális szám reciprokának nevezzük azt az $a_1 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ számot, amelyre $a \cdot a_1 = 1$.

6.3 TIZEDES TÖRTEK, TISZTA SZAKASZOS ÉS VEGYES SZAKASZOS TIZEDES TÖRTEK

Az olyan racionális számok, amelyeknek a nevezője 10 valamilyen hatványa, tizedes törteknek nevezzük. Egy redukált törtet, amelynek a nevezője osztható 2-vel vagy 5-tel, és mással nem, bővíthetünk olyan módon, hogy a nevező 10 valamilyen hatványává váljon. Így jutunk el a tizedes törthez.
Példa:

$$\frac{7}{8} = \frac{7}{2^3} = \frac{7 \cdot 5^3}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{875}{1000} = 0{,}875.$$

Esetünkben a redukált tört a $\frac{7}{8}$ racionális szám volt, $\frac{875}{1000}$ pedig ezzel egyenlő tizedes tört. A tizedes tört tizedes vesszős formája a *0,875*. A 875-nek az 1000 való osztása véges lépés után befejeződik, ezért a kapott tizedes szám egy *véges tizedes szám* vagy *véges tizedes tört*.
Vannak esetek, amikor a redukált tört nevezőjének felbontásában nem szerepel 2 vagy 5. Ekkor a maradékos osztás tétele alapján $a = b \cdot q + r,\ r < b$. Ha nem kapunk maradékul nullát, azaz $r \neq 0$, akkor *legtöbb* $b-1$ maradékot kaphatunk, így a b-ik osztás a hányadosul kapott számok szempontjából ismétlést jelent, azaz beáll egy periodicitás, amely a végtelenségig tart. Az így kapott tizedes számot, tizedes törtet, *végtelen szakaszos tizedes tört*nek nevezzük, az ismétlődő rész a *szakasz*.
Példa:

$$\frac{31}{11} = 2{,}818181\ldots = 2,(81),$$
$$\frac{23}{30} = 0{,}7666\ldots = 0{,}7(6)$$

Megfigyelhető¸ hogy $\frac{31}{11}$ továbbá a $\frac{23}{30}$ is redukált törtek. Az első tizedes tört egy *tiszta szakaszos tizedes tört*, a második tört egy *vegyes szakaszos tizedes tört*, mivel a tizedes vessző után van egy szakasz előtti rész.
A továbbiakban bizonyítás nélkül kijelentünk két tételt:

Tétel: Minden racionális szám felírható tizedes tört formájában.

Tétel: Minden tizedes tört felírható két egész szám hányadosaként.

Tiszta szakaszos tizedes törtek átalakítása racionális számmá

Példa: Alakítsuk törtté az x = 1,(0102) számot.
Megoldás: az x-et 10^4 = 10000-rel szorozzuk, ekkor 10000·x = 10102,0102…, ebből kivonjuk x-et:

$$\begin{array}{rl} 10000 \cdot x = & 10102{,}01020102\ldots \\ x = & 1{,}01020102\ldots \\ \hline 9999 \cdot x = & 10101 \end{array}$$

Innen kifejezzük x-et és azt kapjuk, hogy

$$x = \frac{10101}{9999}.$$

Megjegyezzük, hogy az x-et azért szoroztuk be 10^4-nel, mert a szakaszban *négy számjegy* volt.

6.4 VEGYES SZAKASZOS TIZEDES TÖRT ÁTALAKÍTÁSA RACIONÁLIS SZÁMMÁ

Példa: alakítsuk törtté a x = 0,12(131) vegyes szakaszos tizedes törtet.
Megoldás: az x-et megszorozzuk 10^2=100-zal, mivel a vegyes szakaszban a nem ismétlődő rész pontosan két számjegyből áll: 100·x=12,131131… majd az eredeti egyenlőséget megszorozzuk 10^5=100000, az olvasó már biztosan kitalálta miért, és azt kapjuk, hogy 100000·x = 12131,131131… Az utóbbi egyenlőségből kivonjuk az első egyenlőséget:

$$\begin{array}{rl} 100000 \cdot x = & 12131{,}131131\ldots \\ 100 \cdot x = & 12{,}131131\ldots \\ \hline 99900 \cdot x = & 12119 \end{array}$$

Innen kifejezve x-et kapjuk, hogy

$$x = \frac{12119}{99900}.$$

6.5 A VALÓS SZÁMOK HALMAZA

A természetes számok halmaza ℕ, az egész számok halmaza ℤ, a racionális számok halmaza között a következő bennfoglalási reláció érvényes:
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.
Felmerül a kérdés, hogy a racionális számokkal kimerítettük-e az összes lehetőséget, ami a számokat illeti, másképpen, léteznek-e olyan számok, amelyek nem írhatók fel racionális alakban. A problémát úgy is megközelíthetjük, hogy keressük a racionális számok halmazán például az $x^2-3=0$ egyenlet megoldásait. Ekkor $x^2 = 3$. Feltételezzük, hogy létezik egy ilyen racionális szám. Amennyiben $x \in \mathbb{Q}$-nak, úgy $x = \frac{p}{q}$ alakban felírható, $p, q \in \mathbb{Z}$-nek, és (p, q)=1, $q \neq 0$, azaz a legnagyobb közös osztójuk 1, vagyis p, q relatív prímek (a relatív prímek értelmezését lásd az legnagyobb közös osztó bemutatásánál).
Az x helyett a $\frac{p}{q}$ törtet visszahelyettesítjük az eredeti egyenletbe x helyett, és azt kapjuk, hogy

$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 3 \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 3 \Rightarrow p^2 = 3 \cdot q^2 \Rightarrow$ a p^2 osztható 3-mal, tehát p is osztható 3-mal. Ezek szerint felírható, hogy $p = 3 \cdot k$, $k \in \mathbb{Z}$. Visszahelyettesítve p-nek az így kapot értékét az egyenletbe, azt kapjuk, hogy $\left(\frac{3 \cdot k}{q}\right)^2 = 3 \Rightarrow \frac{9 \cdot k^2}{q^2} = 3 \Rightarrow 9 \cdot k^2 = 3 \cdot q^2 \Rightarrow q^2 = 3 \cdot k^2 \Rightarrow$ a q^2 osztható 3-mal, tehát q is osztható 3-mal, azaz (p, q)=3. Ez a következtetés ellentmond annak, hogy eredetileg azt feltételeztük, hogy (p, q)=1. Így az eredeti feltételezésünket, mely szerint létezik egy olyan racionális szám, amely kielégítené az $x^2 - 3 = 0$ egyenletet elvetjük, és kijelentjük, hogy *nincs olyan racionális alakban felírható szám, amely kielégítené az* $x^2 - 3 = 0$ *egyenletet*.

Megjegyezzük, hogy a fent bemutatott bizonyítási eljárás a *reductio ad absurdum*, a lehetetlenre való visszavezetés technikája. A módszer lényege, hogy a bizonyítandó kijelentést igaznak tételezzük, majd lépésről lépésre haladva eljutunk egy olyan részkövetkeztetéshez, amely ellentmond az eredeti feltételeknek. Ekkor az ellentmondás úgy oldható fel, hogy ha a bizonyítandó kijelentést hamis.

Az olyan számokat, amelyeket nem lehet felírni tört alakban, *irracionális számoknak* nevezzük. Az irracionális számok végtelen tizedes tört alakúak és nem szakaszosak.

A fenti feladatot úgy is megfogalmazhattuk volna, hogy: ”*Bizonyítsuk be, hogy* a $\sqrt{3}$ *szám egy irracionális szám*”.

Az irracionális számok tulajdonságai:

a) Nem írhatók fel két egész szám hányadosaként, hanem csak végtelen nem szakaszos tizedes tört alakjában
b) Az irracionális számok racionális számokkal tetszőleges pontossággal megközelíthetőek.
c) Ha egy természetes szám nem négyzetszám, akkor négyzetgyöke irracionális szám.
d) Egy irracionális szám és egy nullától különböző racionális szám összege, különbsége, szorzata vagy hányadosa szintén irracionális szám.

Az irracionális számok halmaza a racionális számok halmazával együtt a valós számok halmazát (jelölése $\mathbb{R}$ - “real”) adja.

A következőkben bemutatunk egy eljárást, amellyel megközelíthetőek az irracionális számok. Jelöljük a közelített értéket x-szel, illetve az irracionális szám legyen például $\sqrt{5}$. Eljárásunk alapja az, hogy $x < \sqrt{5}$. Innen következik, hogy $\sqrt{5} \cdot x < 5 \Rightarrow \sqrt{5} < \frac{5}{x}$. A két egyenlőtlenség alapján fogjuk megközelíteni a $\sqrt{5}$ értékét. Kezdeti becslési értéke $\sqrt{5}$ –nek legyen 3.

x	$\frac{5}{x}$	Középérték: $\left(x + \frac{5}{x}\right) \cdot \frac{1}{2}$
3	1,6	2,3
2,3	2,17	2,235
2,235	2,237	2,236

Ellenőrizhető, hogy a $\sqrt{5}$ számot a 2,236 három tizedes pontossággal közelíti meg. Amennyiben nagyobb számú tizedes számjeggyel dolgozunk, úgy a közelítésünk is pontosabb.

Példa: $\sqrt{2}$ közelítése:

x	$\frac{2}{x}$	Középérték: $\left(x+\frac{2}{x}\right)\cdot\frac{1}{2}$
1,4	1,42857	1,414285
1,414285	1,414142	1,4142135
1,4142135	1,4142136	1,4142136

Az 1,4142136 hat tizedes pontossággal közelíti meg a $\sqrt{2}$-t. Az utolsó számjegy az egy kerekített szám, így azt nem tekintjük "pontosnak"

6.6 KITŰZÖTT FELADATOK

1) Bizonyítsuk be, hogy a következő számok irracionálisak
   a) $\sqrt{7}, \sqrt{11}, \sqrt{13}, \sqrt{15}$;
   b) $1-\sqrt{7}, 2-\sqrt{11}, 1-\sqrt{13}, 3-\sqrt{15}$;
   c) $2+\sqrt{7}, 1+\sqrt{11}, 3+\sqrt{13}, 1+\sqrt{15}$;
   d) $\frac{1}{1-\sqrt{3}}, \frac{1}{1+\sqrt{3}}, \frac{1}{1-\sqrt{7}}, \frac{1}{2+\sqrt{7}}$.

2) Adjuk meg a $\frac{11}{28}$ racionális szám 2017-ik számjegyét.

3) Adjuk meg a $\frac{11}{27}$ racionális szám 20000-ik számjegyét.

4) Közelítsük meg négy tizedes pontossággal a $\sqrt{5}$, $\sqrt{11}$ és $\sqrt{8}$ értékeit.

5) Írjuk fel racionális alakban:
   a) 1,23(014);
   b) 0,0(123);
   c) 1,(111);
   d) 2,1(212).

7. KOMBINATORIKA

A kombinatorika tárgya végesen sok elemet tartalmazó halmaz elemei sorba rendezési lehetőségeinek a kiszámolása, továbbá a véges halmazból történő kiválasztási esetek számának a vizsgálatával foglalkozik. A kombinatorika a matematika igen jelentős ága, módszereit és eredményeit számos területen használjuk, többek között a valószínűségszámításban és a gráfelméletben.
A kombinatorika problémái két fő kérdéskör köré csoportosulnak:

1. egy halmaz elemeinek különböző sorrendbe való helyezése, és
2. egy halmaz elemeiből a különböző módon való kiválasztás

7.1 PERMUTÁCIÓK

Az első kérdéskör vezet a permutációk fogalmához. Tekintsük a következő feladatot: *Adott egy n elemű halmaz. Hányféleképpen lehet a halmaz elemeit sorba rakni úgy, hogy minden új sor különbözzön az összes többitől*?
Megoldás: tekintsük közelítésképpen a négyelemű {1, 2, 3, 4} halmazt. Ha az 1, 2, 3 és 4 elemekkel kezdjük a sorrendet, akkor összesen 4 féleképpen kezdhetjük a sorunkat. A továbbiakban tételezzük fel hogy rögzítettük az 1-t az első helyre, így a második helyre három elemet tehetünk (2, 3, 4). Azonban ez mind a négy kezdésre igaz, vagyis négy lehetséges kezdés után három folytatás választható, így eddigi lehetőségeink száma: $4 \cdot 3$. A gondolatmenetet folytatva azt kapjuk, hogy a négyelemű halmazt pontosan $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ féle képpen rendezhetjük sorba. A feladatot általánosítva belátható, hogy egy n elemű halmaz elemeit $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ féleképpen rendezhetjük sorba, azaz:

$$P_n = n!.$$

Az n!-t " *n faktoriális*"-nak olvassuk. A négyelemű halmaz elemeinek egy felírási sorrendje, például a 4 1 2 3 számsor a halmaz egy *permutációja*, míg az n! adja a halmaz *permutációinak számát*.
Megegyezés szerint $0!=1$.

7.2 MEGOLDOTT FELADATOK

a) A színházba egy 5 fős baráti társaság jegyei egymás mellé szólnak. Hányféleképpen ülhetnek le egymás mellé? Hányféleképpen ülhetnek le akkor, ha Teri és Feri mindenképp egymás mellett szeretne ülni?
Megoldás: a feladat első része könnyen beláthatóan visszavezethető az $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ értékének kiszámításához, hiszen öt személyünk van, akiket sorba szeretnénk elhelyezni. A helyzet egy kissé bonyolódik, ha Teri és Feri egymás mellé ülnének mindenképpen. Ebben az esetben célszerű Terit és Ferit "összeragasztani" úgy hogy *TeriFeri* legyen belőlük, és a továbbiakban őket együtt kezeljük. Ebben az esetben egy négyelemű halmaz áll elő három, számunkra ismeretlen, emberrel és *TeriFeri*-vel. Őket pontosan $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ módon lehet sorba rendezni. A feladat azonban még nincs megoldva, hiszen a *TeriFeri* állapotot felvált(hat)ja a *FeriTeri* állapot is, ez pedig szintén egy négyelemű halmazt eredményez, amelyet szintén $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ módon lehet sorba rendezni. Tehát: $2 \cdot 4! = 48$ módon lehet sorba rendezni a színházlátogató társaságot úgy, hogy Teri és Feri minden esetben egymás mellett üljenek.

b) Készítsünk az 1, 2, 5, 6, 9 számjegyekből ötjegyű számokat úgy, hogy minden számjegyet egyszer használhatunk.

   i. Hány ötjegyű szám képezhető így?
   Megoldás: 5! = 5·4·3·2·1= 120

   ii. Hány 15-tel kezdődő szám képezhető így?
   Megoldás: Lásd a *TeriFeri*-feladatot. Az első „*elemet*”, a 15-t rögzítjük, marad még három elem. Tehát 3! = 3·2·1 = 6 szám képezhető úgy, hogy 15-tel kezdődjenek.

   iii. Hány páros (ötjegyű) szám képezhető a fenti módon?
   Megoldás: A páros számok páros számjegyben végződnek. Rögzítve a 2-t utolsónak 4! számú ötjegyű számot képezhetünk. Ha a 6-t rögzítjük, akkor szintén 4! páros szám állítható elő a számhalmazból. Tehát 2·4!=2·24=48.

   iv. Hány néggyel osztható szám képezhető a fenti módon?
   Megoldás: A fenti számjegyekből képzett szám akkor osztható néggyel, ha 16-ra, 12-re, 52-re vagy 56-ra végződik. Tehát 4·3!=4!=24 számot állíthatunk elő a fenti feltételeknek megfelelően.

   v. Hány hárommal osztható szám képezhető a fenti módon?
   Megoldás: A választ az olvasóra bízzuk!

7.3 ISMÉTLÉSES PERMUTÁCIÓK

Legyen *n* számú elemünk, amelyek közt rendre $k_1, k_2, \ldots k_p$ számú egymás között megegyező elem található. Ezeknek az elemeknek egy meghatározott sorrendjét az *n* elem egy ismétléses permutációjának nevezzük. Az összes ismétléses permutációk jelölése és száma:

$$P_n^{k_1,k_2\ldots k_p} = \frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdots k_p!}, \quad k_1 + k_2 + \cdots + k_p = n.$$

7.4 MEGOLDOTT FELADATOK

1) Hány különböző négyjegyű szám alkotható egy 1-es, egy 2-es és két 3-as számjegyekből. Írjuk fel a számokat!
   Megoldás: Alkalmazzuk a képletet: $P_4^{1,1,2} = \frac{4!}{1!\cdot 1!\cdot 2!} = \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 1\cdot 2\cdot 1}$=12. A lehetséges négyjegyű számok a következők: 1233, 1323, 1332, 2133, 2313, 2331, 3123, 3132, 3213, 3231, 3312, 3321.

2) Az A, A, A, B, B betűkből hány 5 betűs szó készíthető?
   Megoldás: n=5, k_1=3 (az A betűk száma), k_2=2 (a B betűk száma). Alkalmazzuk a képletet:

$$P_5^{3,2} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1} = 10.$$

3) A bal felső sarokból kiindulva, és jobbra illetve lefele lépkedve hányszor olvasható ki a PERMUTÁCIÓ szó a táblázatból:

P	E	R	M
E	R	M	U
R	M	U	T
M	U	T	Á
U	T	Á	C
T	Á	C	I
Á	C	I	Ó

Megoldás: Észrevesszük, hogy a bal felső sarokból kiindulva, és az első soron végighaladva, minden cella csak egyszer érinthető, továbbá az első oszlopot bejárva, minden cella szintén csak egyszer érinthető:

P	1	1	1
1	2		
1			
1			
1			
1			
1			

A továbbiakban megfigyeljük, hogy a szürke színnel jelölt cellához kétféle képpen jöhetünk: fentről és balról, minkét esetben a PER rész szó az eredmény. Továbbhaladva a soron illetve az oszlopon azt kapjuk, hogy:

P	1	1	1
1	2	3	4
1	3		
1	4		
1	5		
1	6		
1	7		

Azaz, a cellában a 3 szám azt jelöli, hogy a cellába háromféle képpen lehet eljutni. Kitöltjük a cellákat úgy, hogy fentről lefele és balról jobbra haladva minden üres cellába a két átlósan fölötte balra helyezkedő cellák összegét írjuk. Az eredmény:

P	1	1	1
1	2	3	4
1	3	6	10
1	4	10	20
1	5	15	35
1	6	21	56
1	7	28	84

Tehát a PERMUTÁCIÓ szót pontosan 84-szer lehet kiolvasni a rácsból.

A feladatnak van egy másik megoldása, ami szorosan kapcsolódik az ismétléses permutációhoz. Észrevesszük, hogy minden kiolvasott szó egy bizonyos számú jobbra és egy bizonyos számú *lefele* lépésből tevődik össze. Pontosan három *jobbra(j)* és hat *lefele(l)* lépéssel jutok el a bal alsó sarokig. A feladatot úgy is megfogalmazhatjuk, hogy van 3 *j* betűnk és 6 *l* betünk. Hányféleképpen lehet ezeket kirakni. Ekkor *n*=3+6= 9. Alkalmazzuk as ismétléses permutáció képletét:

$$P_9^{3,6} = \frac{9!}{3!\cdot 6!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 3\cdot 4\cdot 7=84$$

Tehát a PERMUTÁCIÓ szót pontosan 84-szer lehet kiolvasni a rácsból.

4) A 0, 1, 1, 1, 2, 2, 5 számjegyek permutálásával hány hétjegyű szám képezhető?
Megoldás: 0-val természetesen nem kezdődhet a szám. Rögzítsük a számot az utolsó helyen, majd az utolsó előttin, és így tovább. Ekkor az 1, 1, 1, 2, 2, 5 számokat kell permutálnunk:

X	X	X	X	X	X	0	Ekkor $P_6^{3,2,1}$ ismétléses permutációnk– számunk! – van, továbbá:
X	X	X	X	X	0	X	$P_6^{3,2,1}$ ismétléses permutációnk van
X	X	X	X	0	X	X	$P_6^{3,2,1}$ ismétléses permutációnk van
X	X	X	0	X	X	X	$P_6^{3,2,1}$ ismétléses permutációnk van
X	X	0	X	X	X	X	$P_6^{3,2,1}$ ismétléses permutációnk van
X	0	X	X	X	X	X	$P_6^{3,2,1}$ ismétléses permutációnk van

Tehát $6\cdot P_6^{3,2,1} = 6\cdot\frac{6!}{3!\cdot 2!\cdot 1!} = 6\cdot 3\cdot 5\cdot 4 = 360$ hétjegyű számot lehet előállítani a 0, 1, 1, 1, 2, 2, 5 számokból.

7.5 KOMBINÁCIÓK - *n* ELEM *k*-AD OSZTÁLYÚ KOMBINÁCIÓI

A fejezet elején említett második kérdéskör a kombinációkra és amint látni fogjuk, a variációkra vonatkozik. Adott egy *n* elemű halmaz. Felvetődik a kérdés, hogy egy *k* elemű $0\leq k\leq n$ részhalmazt hányféle képpen lehet kiválasztani az *n* elemű halmazból. Természetesen a részhalmaz is halmaz, így a kiválasztási sorrend nem számít. A részhalmazok számát az *n* elem *k*-ad osztályú kombinációi adják. Jelölése: C_n^k, és számolási képlete a következő:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

Példa: Adott az {a, b, c, d, e} ötelemű halmaz. Hányféleképpen emelhető ki a halmazból egy háromelemű halmaz. Adjuk meg az összes háromelemű részhalmazt, és a részhalmazok számát.
A részhalmazok:
{a, b, c}, {a, b, d}, {a, b, e}, {a, c, d}, {a, c, e}, {a, d, e}, {b, c, d}, {b, c, e}, {b, d, e}, {c, d, e}.

A részhalmazok száma:

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!\cdot(5-3)!} = \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1} = 10.$$

7.6 MEGOLDOTT FELADATOK

1) Hány részhalmaza van egy hatelemű halmaznak.
   Megoldás: Meg kell számolnunk, hogy hány 0 elemű, 1, 2, 3, 4, 5 és 6 elemű részhalmaza van a halmaznak.
   $C_6^0 = \frac{6!}{0!\cdot(6-0)!} = 1;$
   $C_6^1 = \frac{6!}{1!\cdot(6-1)!} = 6;$
   $C_6^2 = \frac{6!}{2!\cdot(6-2)!} = 15;$
   $C_6^3 = \frac{6!}{3!\cdot(6-3)!} = 20;$
   $C_6^4 = \frac{6!}{4!\cdot(6-4)!} = 15;$
   $C_6^5 = \frac{6!}{5!\cdot(6-5)!} = 6;$
   $C_6^6 = \frac{6!}{6!\cdot(6-6)!} = 1;$

   Összesen 1+6+15+20+15+6+1 = 64 = 2^6

Megjegyzés: Bebizonyítható, hogy

$$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n.$$

2) Egy pályázaton 12-en vettek részt: 5 külföldi és 7 hazai cég. Mindegyikük egy-egy pályázatot nyújtott be. Három pályázat kapott díjat. Hányféleképpen lehet a díjazottak között pontosan 1 külföldi cég, ha a díjak azonosak?
   Megoldás:
   $C_5^1 = 5$ –féleképpen lehet kiválasztani egy céget az öt külföldiből;
   $C_7^2 = 21$ –féleképpen lehet kiválasztani két céget a hét hazaiból;
   Tehát 5·21=105 féleképpen lehet díjazni.

7.7 KOMBINÁCIÓK - *n* ELEM *k*-AD OSZTÁLYÚ ISMÉTLÉSES KOMBINÁCIÓI

Adott egy *n* elemű halmaz. Felvetődik a kérdés, hogy egy *k* elemű $0 \leq k \leq n$ részhalmazt hányféle képpen lehet kiválasztani az n elemű halmazból úgy, hogy a kiválasztott elemek ismétlődhetnek, továbbá az elemek sorrendjére nem vagyunk tekintettel. Egy ilyen *k* elemű részsorozatot, amely ismétléseket is tartalmazhat, az n halmaz elemeiből az *n* elem egy *k*-ad osztályú ismétléses kombinációjának nevezzük. Az *n* elemből kiválasztható különböző *k*-ad osztályú ismétléses kombinációit $C_n^{k,i}$-vel jelöljük, és a következőképpen számítjuk ki:

$$C_n^{k,i} = C_{n+k-1}^k.$$

Megjegyezzük, hogy a felső kitevőben az *i* az ismétlésre vonatkozik.

Példa: jelöljük egy baráti társaság négy tagját A, B, C és D-vel. A társaság egy este elmegy egy baráti beszélgetésre. Az este során kétszer szólal meg a telefonjuk (feltételezzük, hogy mindenkinek van

telefonja). Hányszor szólalhat meg a telefon, ha ugyanaz a személynek akár kétszer is megszólalhatott a telefonja? Megjegyezzük, hogy a sorrend nem számít AB≡BA, ahol AB azt jelenti, hogy a két csengetés egyike A-nak a másik B- nek szólt.
Megoldás: a lehetséges esetek AA, AB, AC, AD, BB, BC, BD, CC, CD, DD.
A lehetséges esetek száma: $C_4^{2,i} = C_{4+2-1}^2 = C_5^2 = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = 10.$

7.8 MEGOLDOTT FELADATOK:

1) Egy gyerek 5 különböző fagylaltból választhat ki egy háromgombócos adagot (M – málna, V – vanília C - citrom). Hányféle lehetősége van a választásra? Megjegyezzük, hogy az MVM és az MMV fagyikat azonosaknak tekintjük, azaz a sorrend nem számít.
   Megoldás: $C_5^{3,i} = C_{5+3-1}^3 = C_7^3 = \frac{7!}{3!\cdot 4!} = 35.$
   Néhány a lehetséges esetek közül: MMM, MMV, MMC, MVV,…,CCC.
2) A példában szereplő társaságnak (A, B, C és D) most már nem kétszer, hanem ötször szólalhat meg a telefonja. Hányszor szólalhat meg a telefon, ha ugyanannak a személynek akár ötször is megszólalhat a telefonja? A lehetséges esetek néhány eleme: AAAAA, AAAAB, AAAAC, …, DDDDD.
   Megoldás: $C_4^{5,i} = C_{4+5-1}^5 = C_8^5 = \frac{8!}{5!\cdot 3!} = 56$, szóval a fenti sorozat 56 elemből áll.

7.9 VARIÁCIÓK - *n* ELEM *k*-AD OSZTÁLYÚ VARIÁCIÓI

Adott egy *n* elemű halmaz. Felvetődik a kérdés, hogy *k* elemet hányféle képpen lehet kiválasztani az *n* elemű halmazból úgy, hogy a kiválasztott elemek nem ismétlődhetnek, azaz a kiválasztott elemet nem tesszük vissza a halmazba, továbbá az elemek sorrendjére tekintettel vagyunk, a sorrend számít és $k \leq n$.
Az *n* elem *k*-ad osztályú ismétlés nélküli variációinak számát a :

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots \cdot (n-k+1).$$

Példa: Egy 8 fős csoport 3 tisztségre (elnök, alelnök, titkár) a tagjaiból választást tart. Hányféleképpen végződhet a szavazás, ha egy ember csak egy tisztséget tölthet be, és arra a tisztségre a csoportból bárki jelölhető?

Megoldás: Az első helyen 8-an lehetnek, tehát 8 változatunk van, a második helyen, miután az első helyet már lefoglaltuk 7-en vannak, tehát 7 változat lehetséges. Ezek után belátható, hogy a titkári állásra hat lehetséges esetünk lehet, a fenti feladat körülményei mellett. A választási lehetőségek száma így: $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$. A fenti képletet alkalmazva azt kapjuk, hogy:

$$V_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336.$$

7.10 MEGOLDOTT FELADATOK

1) Egy urnában hat golyó van, az 1, 2, 3, 4, 5 és 6 számmal számozva. Az urna tartalmát összerázzuk, és találomra egymás után négy golyót kihúzunk belőle, anélkül, hogy a golyókat visszatennénk. A golyókra írt számok sorrendjét lejegyezzük, a golyókat visszahelyezzük az urnába. Hány különböző számsor sorrend lehetséges.
   Megoldás: A lehetséges számsorok az: (1,2,3,4), (1,2,4,3), (1,3,2,4,)...(4,3,2,1), ...(6,5,4,3). A számsorok száma:
$$V_6^4 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 = 360$$

2) Hány nyolcra végződő négyjegyű szám van, ha a szám számjegyei nem ismétlődhetnek?
   Megoldás: Három esetet tárgyalunk:

   i. A szám

x	*y*	0	8

   alakú, *x,y* $\in \{1,2,3,4,5,6,7,9\}$, $x \neq y$. Ebben az esetben a lehetséges esetek száma: $V_8^2 = 56$.

   ii. A szám

x	0	y	8

   alakú, *x,y* $\in \{1,2,3,4,5,6,7,9\}$, $x \neq y$. Ebben az esetben a lehetséges esetek száma: $V_8^2 = 56$.

   iii. A szám

x	*y*	*z*	8

   alakú, *x, y,* $z \in \{1,2,3,4,5,6,7,9\}$, $x \neq y$, $x \neq z$ és $y \neq z$. Ebben az esetben a lehetséges esetek száma: $V_8^3 = 336$.

   A három eset esetszámait figyelembe véve, megállapítjuk, hogy 56+56+336 = 448 olyan szám van amely négyjegyű, utolsó számjegye 8 és a számjegyek különböznek.

7.11 VARIÁCIÓK - *n* ELEM *k*-AD OSZTÁLYÚ ISMÉTLÉSES VARIÁCIÓI

Adott egy *n* elemű halmaz. Felvetődik a kérdés, hogy *k* elemet hányféleképpen lehet kiválasztani az *n* elemű halmazból úgy, hogy a kiválasztott elemek ismétlődhetnek, azaz a kiválasztott elemet visszatesszük a halmazba, továbbá az elemek sorrendjére tekintettel vagyunk, a sorrend számít. Az *n* elem *k*-ad osztályú ismétléses variációinak számát a:
$$V_n^{k,i} = n^k$$

képlet adja. Megjegyezzük, hogy a kiválasztások száma a *k* nincs viszonyban *n*-nel, azaz *k* lehet nagyobb, mint *n*.

Példa: Adott az A = {a, b, c, d} halmaz. Írjuk fel a halmaz elemeiből képezhető másodosztályú ismétléses variációkat és azok számát.
Megoldás: Az ismétléses variációk:

aa	*ba*	*ca*	*da*
ab	*bb*	*cb*	*db*
ac	*bc*	*cc*	*dc*
ad	*bd*	*cd*	*dd*

Az ismétléses variációk száma esetünkben: $V_4^{2,i} = 4^2 = 16.$

7.12 MEGOLDOTT FELADATOK

1) Egy dobókockával ötször dobunk egymás után. Hány különböző dobássorozatot kaphatunk, ha a dobások sorrendje nem számít.
Megoldás: A kockának 6 oldala van, az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számokkal. Az első lehetséges számsorozat az 1, 1, 1, 1, 1, azután az 1, 1, 1, 1, 2 ...az utolsó lehetséges sorozat a 6, 6, 6, 6, 6. Tehát n = 6, k = 5. Az ismétléses variációk száma esetünkben: $V_6^{5,i} = 6^5 = 7776.$

2) Hány 7-re végződő négyjegyű szám van?
Megoldás: a keresett számok általános alakja:

c_1	c_2	c_3	7

Ahol c_1, c_2, c_3 számjegyek, így $c_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, i =1,2,3. A tízelemű halmazból három elemet kell kiválasztanunk rendre a c_1, c_2 és c_3-nak. Az így kialakult négyjegyű számok száma: $V_{10}^{3,i} = 10^3 = 1000.$ Viszont ezekből a számokból le kell vonnunk azoknak a számoknak a számát, amelyek 0-vak kezdődnek, tehát:

0	c_1	c_2	7

alakúak. Ebben az esetben is $c_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, de itt i =1,2. Ezeknek a számoknak a száma: $V_{10}^{2,i} = 10^2 = 100.$ Következésképpen, a keresett számok száma:
$$V_{10}^{3,i} - V_{10}^{2,i} = 1000 - 100 = 900.$$

3) Hány olyan négyjegyű szám van, ami csak az 1 és 2 számjegyeket tartalmazza? Adjuk meg ezeknek a számoknak az összegét

Megoldás: n = 2, k = 4, $V_2^{4,i} = 2^4 = 16.$
Ha ezeket a számokat egymás alá írjuk, akkor egy-egy oszlopban 8-8 egyes és kettes számjegy lesz, tehát egy oszlop összege: $8 \cdot 1 + 8 \cdot 2 = 24$. Mivel négyjegyű számokról van szó, a keresett összeg = $24 \cdot 10^3 + 24 \cdot 10^2 + 24 \cdot 10^1 + 24 \cdot 10^0 = 24 \cdot (10^3 + 10^2 + 10^1 + 10^0) =$
$$= 24 \cdot \frac{10^4 - 1}{10 - 1} = 24 \cdot \frac{9999}{9} = 24 \cdot 1111 = 26664.$$

7.13 KITŰZÖTT FELADATOK

Permutációk

1) Egy futó versenyen nyolc futó került a döntőbe. A döntőben hány különböző befutási sorrend lehetséges, ha feltételezzük, hogy nem volt holtverseny?

2) Hány olyan ötjegyű szám képezhető az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből, amelyben az 1-e és a 3-as jegy egymás mellett helyezkedik el és minden számjegyet pontosan egyszer használhatunk fel? És ha a 2-es számjegyet 0-ra cseréljük?

3) Hány ötjegyű páros szám képezhető a 0, 1, 2, 3, 4 számjegyekből, ha minden számjegy csak egyszer szerepelhet?

4) Hányféleképpen ülhet le 9 ember egy kilencszemélyes hosszú padra?

5) Hányféleképpen ülhet le 4 nő és 5 férfi egy kilencszemélyes hosszú padra, úgy hogy azonos neműek ne kerüljenek egymás mellé?

6) A 0, 1, 2, 3, 4, 5 számjegyek felhasználásával hány olyan hatjegyű számot írhatunk fel, amelyben minden számjegy csak egyszer fordul elő?

7) Tíz regény közül az egyik háromkötetes, a többi egykötetes. Hányféleképpen tehetjük fel a könyveket a könyvespolcra, ha a háromkötetes regény könyveinek egymás mellett kell lenniük?

8) A 0, 1, 2, 3, 4, 5 számjegyek felhasználásával hány olyan hatjegyű számot írhatunk fel, amelyben minden számjegy csak egyszer fordul elő?

9) A 0, 1, 2, 3, 4 számjegyekből hány ötjegyű szám készíthető, ha minden számjegyet csak egyszer használunk fel? Ezek között hány olyan szám van, amelyben a 0 a második helyen szerepel?

10) 10 házaspárt szeretnénk leültetni egy egyenes asztal mellé. Hányféle sorrend lehetséges, ha azonos neműek nem ülhetnek egymás mellett?

11) Hány olyan permutációja van az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 elemeknek, amelyben az első három helyet a 6, 7, 8 elemek foglalják el valamilyen sorrendben, s az utolsó helyen az 5-ös áll?

12) Hányféleképpen állíthatunk sorba 30 tanulót úgy, hogy a 3 legmagasabb
    a) A sor elejére;
    b) A sor végére;
    c) Egymás mellé kerüljön?

13) Egy gimnáziumi osztályból 6 leány és 4 fiú kötelező oltáson jelenik meg. Hányféle sorrend állítható elő a diákokból?

14) Nyolc autónak leszerelték egy-egy rendszámtábláját.
   a) Hányféleképpen lehet úgy a nyolc autóra felszerelni ezekből egyet-egyet úgy, hogy pontosan két rendszámtábla visszakerüljön az eredeti helyére.
   b) Hányféleképpen lehet úgy a nyolc autóra felszerelni ezekből egyet-egyet úgy, hogy pontosan öt rendszámtábla *ne* kerüljön vissza az eredeti helyére.

Ismétléses permutációk

1) Hány ötjegyű számot írhatunk fel a 3, 3, 3, 4, 4 számokból?

2) Hány ötjegyű számot írhatunk fel a 0, 2, 2, 4, 6 számokból?

3) A MATEMATIKA szónak hány permutációja van?

4) Hányféle sorrendbe írhatók a PARALELOGRAMMA szó betűi?

5) Hányféleképpen olvasható ki a PARALELOGRAMMA szó a táblázatból, ha a bal felső sarokból indulunk ki és a jobb alsó sarokba érkezünk meg?

P	A	R	A	L	E	L	O
A	R	A	L	E	L	O	G
R	A	L	E	L	O	G	R
A	L	E	L	O	G	R	A
L	E	L	O	G	R	A	M
E	L	O	G	R	A	M	M
L	O	G	R	A	M	M	A

6) Hány hatjegyű páros szám alkotható a 2, 2, 3, 5, 6, 6 számjegyekből?

7) A KOMBINATORIKA szónak hány permutációja van?

8) Hányféleképpen tölthetünk ki egy PRONOSPORT szelvényt - ha 13 mérkőzésre tippelünk - úgy, hogy 8 darab 1-es, 2 darab x-es és 3 darab 2-es tipp legyen rajta?

9) A 0, 1, 1, 1, 2, 2, 5 számjegyek permutálásával hány hétjegyű öttel osztható szám képezhető?

10) A 0, 1, 1, 1, 2, 2, 5 számjegyek permutálásával hány hétjegyű kettővel osztható szám képezhető?

11) A 0, 1, 1, 1, 2, 3, 3 számjegyekből hány páros szám képezhető?

12) Egy dobozban két sárga golyó van. Hány darab piros golyót kell a dobozba tenni, ha azt kívánjuk elérni, hogy a dobozban összes golyó 21 különböző módon legyen kirakható (kihúzható)?

13) Egy dobozban 16 golyó van, közülük 10 fehér, 4 piros és 2 kék színű. A 16 golyót egymás után kihúzzuk a dobozból. Hány sorrendben húzhatjuk ki a golyókat, ha az egyszínűeket nem különböztetjük meg?

14) Hányféleképpen tölthetünk ki egy PRONOSPORT szelvényt, ha 8 darab 1-es, 2 darab x-es és 3 darab 2-es tipp kell legyen rajta?

Kombinációk

1) Egy 35 fős osztályban 6 gyereket kirándulni küldenek, Hányféleképpen választható ki a kiránduló hat gyerek?

2) Egy síkban 10 pontot jelölünk meg. Hány olyan egyenest lehet húzni, amely két pontot átmegy.

3) A lottó számai 1-től 49-ig terjednek. Valaki a 10, 11 és 18 számokkal mindig játszik. Ha egy játékban hat szám fogadható meg, akkor összesen hány játékváltozat lehetséges?

4) Petinek 5 órája lesz holnap: magyar, matek, rajz, ének és német, de csak háromból van írásbeli házi feladat. Hányféle eset lehetséges?

5) Egy síkban 10 nem egybeeső pontot jelölünk meg. Kiválasztunk hármat és egy háromszöghet szerkesztünk. Hány különböző háromszög szerkeszthető?

6) Egy 32 lapos magyar kártyából hányféleképpen húzhatunk ki visszatevés nélkül 5 piros lapot? A sorrend nem számit! Gondoljunk arra, hogy 8 piros lap van!

7) A 32 lapos magyar kártyából egy játékosnak kiosztunk 10 lapot. Hányféle laptartalom alakulhat ki, ha tudjuk, hogy véletlenül mind a négy ászt a játékosnak osztottuk. A sorrend nem számít.

8) Az ötös, vagy a hatos lottón lehet kevesebb szelvénnyel biztosan telitalálatot elérni. (Az ötös lottó esetén 90 szám közül kell ötöt eltalálni, a hatoson 45-bol 6-ot.)

9) Hány olyan ötjegyű szám van, melynek jegyei
   a) növekvő sorrendben,
   b) csökkenő sorrendben következnek egymás után?

10) Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 elemek hány negyedosztályú ismétlésnélküli kombinációja tartalmazza az 1, 2 elemeket?

11) Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 elemek hány hatod osztályú ismétlésnélküli kombinációja tartalmazza az 1, 2 és 4 elemeket?

12) Hány olyan részhalmaza van az egyjegyű pozitív egész számok halmazának, amelynek
   a) a 4 is és az 5 is eleme;
   b) a 4 eleme, de az 5 nem;
   c) az 5 eleme, de a 4 nem
   d) sem a 4, sem az 5 nem eleme?

13) Igazoljuk, hogy egy 53 elemű halmaznak ugyanannyi 16 elemű részhalmaza van, mint ahány 37 elemű.

Ismétléses kombinációk

1) Hányféleképpen helyezhetünk el 5 levelet 16 rekeszbe, ha a levelek között nem teszünk különbséget és egy rekeszbe legfeljebb egy levelet teszünk.

2) Hányféleképpen helyezhetünk el 5 levelet 16 rekeszbe, ha a levelek között nem teszünk különbséget és egy rekeszbe több levelet is tehetünk.

3) Egy tisztségre 3 jelölt van, ezekre 20-an szavaznak. Hányféle eredménnyel végződhet a szavazás, ha mindenki egy jelöltre szavaz? (Eredmény: kire hányan szavaztak.)

4) Egy osztályban egy évben háromszor kerül sor jutalmazásra. Hányféleképpen lehet jutalmazási csoportokat kialakítani, ha az egyes jutalmazásoknál mindenkit figyelembe veszünk, azaz lehetséges az, hogy mindhárom jutalmazáskor ugyanaz a diák kapjon jutalmat.

Variációk

1) Az 1, 2, 6, 8, 9 számjegyekből hány háromjegyű szám készíthető, ha a számjegyek nem ismétlődhetnek.

2) A 0, 1, 2, 6, 8, 9 számjegyekből hány négyjegyű szám készíthető, ha a számjegyek nem ismétlődhetnek.

3) Egy urnában 10 cédula van, rendre a 0, 1, 2,…, 9 számjegyekkel megjelölve. Egymás után hat cédulát húzunk ki, a cédulákat nem tesszük vissza. Hány esetben kapunk hatjegyű páratlan számot?

4) Egy urnában 10 cédula van, rendre a 0, 1, 2, . . ., 9 számjegyekkel megjelölve. Egymás után hat cédulát húzunk ki, a cédulákat nem tesszük vissza. Hány esetben kapunk hatjegyű 5-tel osztható számot?

5) Egy urnában 10 cédula van, rendre a 0, 1, 2, . . ., 9 számjegyekkel megjelölve. Egymás után hat cédulát húzunk ki, a cédulákat nem tesszük vissza. Hány esetben kapunk hatjegyű, 5-tel osztható páratlan számot?

6) Zászlókészítéshez ötszínű vászon (P, F, Z, K, S, L) áll rendelkezésre.
   a) Hány háromszínű zászló készíthető?
   b) Hány háromszínű zászló készíthető, ha középen csak F színű lehet?
   c) Hány háromszínű zászló készíthető, ha középen csak F vagy S színű lehet?
   d) Hány háromszínű zászló készíthető, ha középen sem F sem S színű lehet?

Ismétléses variációk

1) Hány négyre végződő ötjegyű szám van?
2) Hány 6-ra végződő hatjegyű szám van?
3) Hány néggyel osztható ötjegyű szám van?
4) Hány ötre végződő hatjegyű szám van?
5) Hány hatjegyű öttel osztható szám van?
6) Hány olyan háromjegyű szám van, amelyiknek minden számjegye 6-nál nagyobb?
7) Hány olyan háromjegyű szám van, amelyiknek minden számjegye 3-nál kisebb?
8) Hány olyan háromjegyű szám van, amelyiknek minden számjegye 3-nál nagyobb páros szám?

Függvénytani ismereteket felhasználó feladatok

1) Ha $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, határozzuk meg az $f: A \to A$ bijektív függvények számát, amelyre $f(1)=2$.
2) Hány $f: \{1, 2, 3, \ldots, 10\} \to \{0,1\}$ függvényre teljesül az $f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(10)=2$ egyenlőség
3) Határozzuk meg az $f: \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ injektív függvények számát, amelyekre $f(1) \neq 1$.
4) Adott egy $f: \{1, 2, 3\} \to \{4, 5, 6\}$ injektív függvény. Igazoljuk, hogy $f(1)+f(2)+f(3)=15$.
5) Az $A=\{1, 2, 3\}$ és $B=\{5, 6, 7, 8\}$ halmazok esetén, határozzuk meg az $f: A \to B$ szigorúan monoton függvények számát.

Vegyes feladatok

1. Hányféleképpen írható fel a MISSISSIPPI szó úgy, hogy a *két S betű ne következzen* egymás után?
2. Hányféleképpen írható fel a MASSASAUGA szó (észak 9*amerikai mérges kígyó) úgy, hogy a *két A betű ne következzen egymás után*?
3. Hányféleképpen írható fe la MASSASAUGA szó (észak amerikai mérges kígyó) úgy, hogy a *csak két A betű következzen egymás után* (Pld.: MAASSASUGA – *megfelelő*, MAAASSSGU – *nem megfelelő*)?

4. Öt pénzérmét 10 gyerek között osztunk el. Hányféle elosztás lehetséges, ha egy gyerek megkaphatja akár mind az öt pénzérmét?

5. Öt pénzérmét 10 gyerek között osztunk el. Hányféle elosztás lehetséges, ha egy gyerek *legtöbb egy pénzérmét kaphat?*

6. Hány *néggyel osztható négyjegyű* szám van?

8. A VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS ELEMEI

A matematikában egy eseményen adott körülmények között megismételhető történést értünk. Az események egy kísérlet lehetséges kimenetelei. Például egy pénz feldobásakor két lehetséges eseményünk van “fej” vagy “írás”, egy gyerek születésekor két lehetséges eseményünk van a gyerek nemét illetően: fiú vagy leány, egy kocka eldobásakor hat lehetséges eseményünk van: az a szám, amit a kocka a dobás után mutat, stb.

Elemi eseménynek nevezzük azt az eseményt, ami csak egyféleképpen következhet be. Könnyen belátható, hogy a kocka eldobásakor hat elemi esemény lehetséges.

Összetett esemény az az esemény, ami egy megfigyelés sorozat során többféleképpen is bekövetkezhet. Például egy kocka eldobásakor a „*páratlan számot mutat a kocka*”, vagy „*prímszámot mutat a kocka*” esemény többféleképpen bekövetkezhet.

Definíció: egy megfigyelés sorozat elemi eseményeinek halmazát *eseménytér*nek nevezzük, és általában *H*-val jelöljük. A *H* eseménytér bármely részhalmaza az adott megfigyelés sorozatra vonatkozóan egy eseményt határoz meg.

Speciális események:

- **Biztos esemény**: a megfigyelés sorozatban minden esetben bekövetkezik. Például kockadobás esetében a „*7-nél kisebb nem nulla számot mutat a kocka*” esemény mindig bekövetkezik. Jelölése I.
- **Lehetetlen esemény**: a megfigyelés sorozatban soha nem következik be. A kockadobásnál maradva a „*negatív számot mutat a kocka*” esemény soha nem következik be.

8.1 A VALÓSZÍNŰSÉG FOGALMA

Egy megfigyelés sorozat során egy adott *A* esemény *k* alkalommal következik be, miközben *n* eseményből áll a teljes megfigyelés sorozat. Az *A* esemény relatív gyakoriságát a

$$relativ\ gyakoriság = \frac{k}{n}$$

képlettel számoljuk ki. A *valószínűség fogalmát* az a megfigyelés adta, hogy egy megfigyelés sorozat során egy megfigyelt *A* esemény relatív gyakorisága egy adott számérték körül ingadozott. Ezt a számot tekintjük a megfigyelt esemény valószínűségének.

Definíció: *az A esemény valószínűsége az a szám, amely körül a megfigyelés sorozat kapcsán az A esemény relatív gyakorisága ingadozik.*

8.2 A VALÓSZÍNŰSÉG AXIÓMÁI

1. **axióma:** a H eseménytér tetszőleges A eseményéhez tartozik egy $P(A)$ szám, az A esemény valószínűsége, amelyre igaz, hogy :
$$0 \leq P(A).$$
Megjegyzés: bizonyítható, hogy $P(A) \leq 1$

2. **axióma:** A biztos esemény valószínűsége 1:
$$P(I) = 1.$$
3. **axióma:** Ha A és B egymást kizáró események, akkor annak valószínűsége, hogy az egyik vagy másik bekövetkezik:
$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

A klasszikus valószínűség-számítás alaptétele: Ha a H véges eseménytér n elemi eseménye egyenlő valószínűséggel következik be, akkor bármelyik k elemi eseményből álló A esemény valószínűsége:

$$P(A) = \frac{k}{n}, \text{ ahol } 0 \leq k \leq n.$$

8.3 MEGOLDOTT FELADATOK

a) Adott az $A = \{1,2,\ldots,1000\}$ halmaz. Számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy a $\{\sqrt[3]{n}\,|n \in A\}$ halmaz véletlenszerűen kiválasztott eleme racionális szám legyen
Megoldás: először megállapítjuk, hogy n=1000 és könnyen belátható, hogy a halmaz minden eleme egyenlő valószínűséggel következik be. Nem kell bizonygatnunk, hogy a $\sqrt[3]{n}$ csak akkor racionális, ha n köbszám. Keressük meg tehát a halmaz köbszámait!

m	1	2	3	4	…	9	10
m^3	1	8	27	64	…	729	1000

Tehát az A halmazban pontosan 10 köbszám található, így a relatív gyakoriság k =10. A keresett valószínűség:
$p = \frac{10}{1000}$ = 0,01.

b) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy az $A = \{0,5,10,\ldots,2015\}$ halmazból kiválasztott elem osztható legyen 25-tel.
Megoldás: Az $|A|$=2015:5=403, tehát n = 403, és minden elem egyenlő valószínűséggel következik be. Keressük meg, hány 25-tel osztható szám van a halmazban. Elkészítjük a következő táblázatot:

5	10	15	20	25	400:5=80 sor
30	35	40	45	50	
…					
1980	1985	1990	1995	2000	
2005	2010	2015			

A táblázat adataiból következik, hogy pontosan 81 (80 + a nulla) olyan szám van a halmazban, amelyik osztható 25-tel, tehát a relatív gyakoriság $k = 81$. A keresett valószínűség: $p = \frac{81}{403} =$ 0,20.

8.4 KITŰZÖTT FELADATOK

1) Egy minden oldalán befestett kockát 1000 azonos méretű kis kockára fűrészelünk szet. A kis kockákból véletlenszerűen választunk egyet. Mi a valószínűsége, hogy festett lesz a kis kocka (nem számít, hogy egy, két vagy három oldalán)?

2) Az $A= \{1,2,3,4,5\}$ halmaz részhalmazai közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a kiválasztott részhalmaz elemeinek szorzata 120 legyen!

3) Az $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ halmaz nem üres részhalmazai közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a kiválasztott részhalmaz minden eleme páratlan szám legyen!

4) Számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy a $\{\sqrt{n} | n \in \mathbb{N}, n < 100\}$ halmaz véletlenszerűen kiválasztott eleme racionális szám legyen!

5) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a $A =\{0,1,2,3,\ldots,2017\}$ halmazból véletlenszerűen kiválasztott elem osztható legyen 5-tel!

6) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott háromjegyű természetes szám osztható legyen 50-nel!

7) Adott az $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ halmaz. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy az $A\times A$ Descartes szorzat egy véletlenszerűen kiválasztott (a,b) eleme esetén az a és b számok szorzata páros legyen!

8) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott négyjegyű természetes szám osztható legyen 9-cel!

9) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy véletlenszerűen kiválasztva egy számot a $\{11,12\ldots, 50\}$ halmazból, az osztható legyen 2-vel és 5-tel!

10) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy az 56 osztóinak halmazából kiválasztott szám osztható legyen 4-gyel!

11) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy az $A = \{1,3,5,\ldots,2017\}$ halmazból kiválasztott elem a 3 többszöröse legyen!

12) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy az $A = \{2,4,6,\ldots,2018\}$ halmazból kiválasztott elem osztható legyen 4-gyel és ne legyen osztható 8-cal!

13) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy az $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ halmaz valamely véletlenszerűen kiválasztott részhalmazának három eleme legyen!

14) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a háromjegyű természetes számok halmazából kiválasztott szám számjegyeinek összege 2 legyen!

15) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a páros kétjegyű természetes számok halmazából kiválasztott szám osztható legyen 4-gyel!

16) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a kétjegyű természetes számok halmazából kiválasztott szám mindkét számjegye páratlan legyen!

17) Egy dobozban 49 golyó van. A golyók sorszámozva vannak 1-től 49-ig. Számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy véletlenszerűen kihúzott golyón levő szám teljes négyzet!

18) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a $A = \{1,2,3,\ldots,100\}$ halmazból véletlenszerűen kiválasztott elem **ne** legyen osztható 6-tal!

19) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy egy 1 és 1000 közötti természetes szám teljes köb legyen!

20) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a háromjegyű természetes számok halmazából kiválasztott szám első számjegye prímszám legyen!

21) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a háromjegyű természetes számok halmazából kiválasztott szám számjegyeinek szorzata páratlan legyen!

22) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a kétjegyű természetes számok halmazából kiválasztott ab szám esetén $a \neq b$ legyen!

23) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a kétjegyű természetes számok halmazából kiválasztott szám teljes négyzet legyen!

24) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a háromjegyű természetes számok halmazából kiválasztott számnak pontosan két egyenlő számjegye legyen!

25) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy egy háromjegyű természetes szám minden számjegye egyenlő legyen!

26) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a $\{10,11,12,\ldots, 40\}$ halmazból kiválasztott szám számjegyeinek összege osztható legyen 3-mal!

Megjegyzés: A feladatok nagy részét a tanügyminisztérium érettségi-tétel javaslataiból válogattam.

9. A SKATULYAELV

A skatulyaelv megalkotója *Peter Gustav Dirichlet* (1805 - 1859) német matematikus. A skatulyaelv leegyszerűsített megfogalmazása a következő:

Ha n skatulyába elhelyezünk n-nél több tárgyat, akkor lesz olyan skatulya, amelyben legalább két tárgy kerül.

Egy másik megfogalmazás szerint:

Ha n dobozba legalább $n{\cdot}k+1$ tárgyat helyezünk el, akkor legalább egy dobozba k darabnál többet kell tennünk.

Példa: Mutassuk meg, hogy Marosvásárhelyen biztosan van két ember, akinek ugyanannyi hajszála van.
Megoldás: Az olvasó biztosan tudja, ha nem akkor pedig megkeresheti az interneten, hogy egy embernek kb. 100000 hajszála van. Tekintsük ezt kiindulópontnak. Marosvásárhely lakosainak száma 2012-ben 142 327-volt. Tekinthetjük ezt is kiindulópontnak. Képzeljünk el egy 100001-es sorozat dobozt: 0, 1, 2, ...,99999, 100000 cinkékkel. Helyezzük bele a megfelelő hajszálszámú embereket. Egy idő után, mivel több ember van, mint hajszál, biztosan lesz olyan „doboz”, amelyben már van ember. Ebben a dobozban az embereknek azonos hajszálszáma lesz.□

9.1 MEGOLDOTT FELADATOK

1) Legalább mekkora létszámú az az osztály, ahol biztosan van két olyan diák, akinek ugyanannyi foga van?
   Megoldás: Egy embernek maximum 32 foga van. Vegyünk egy 33 dobozból álló sorozatot a dobozokon a 0, 1, 2, ..., 31, 32 címkékkel, egy 33 fős osztály tagjainak a neveit címkéken, és rakjuk bele a dobozokba az osztály tagjainak nevét tartalmazó címkéket, a fogak száma szerint. Egy adott pillanatban biztosan lesz egy olyan doboz, ahova két címke kerül, mivel az összes diáknak 0 és 32 között van a fogainak száma.□

2) Egy fiókban 10 fekete és 10 fehér, azonos méretű zokni van. Legkevesebb hány darabot kell kivenni ahhoz, hogy a zoknik között biztosan legyen egy pár azonos színű.
   Megoldás: A feladat megfogalmazása kissé félrevezető, hiszen sokkal több zokni esetében is ugyanez lenne a helyzet: képzeljük el, hogy az első két húzásra egy-egy fekete illetve fehér zoknit húzunk ki a zsákból és egy-egy dobozba tesszük. Ebben az esetben a harmadik húzás biztosan kiegészíti az addigi két fél párt, azaz vagy a fehér vagy a fekete dobozba kerül.□

3) Egy zsákba tíz pár barna és tíz pár fekete azonos méretű kesztyűt teszünk, majd az egészet jól összekeverjük. Legkevesebb hány kesztyűt kell kivenni a zsákból ahhoz, hogy biztosan legyen egy pár azonos színű kesztyűnk.

Megoldás: Képzeljünk el két dobozt, két-két rekesszel az ábra szerint.

balos	jobbos	balos	jobbos
Fekete kesztyűk		Barna kesztyűk	

Gondoljunk a lehető legrosszabb esetre: kihúzunk 10 darab balos barna kesztyűt, majd kihúzunk 10 darab jobbos fekete kesztyűt, tehát összesen 20 húzást végeztünk el. A 21-i húzásunk biztosan barna jobbos vagy fekete balos kesztyű lesz, mert csak ezek maradtak. Így legkevesebb 21 húzás után biztosan lesz egy pár fekete vagy barna kesztyűnk.

4) Legyen a, b és c három természetes szám! Bizonyítsuk be, hogy az $a \cdot b \cdot c \cdot (b - a) \cdot (c - a) \cdot (c - b)$ szorzat osztható 6-tal!
Megoldás: egy szám akkor osztható hattal, ha osztható 2-vel és 3-mal. Az a, b és c számok közül kettő biztosan azonos paritású (páros vagy páratlan), így a különbségük biztosan osztható 2-vel. Megállapítjuk, hogy a szorzat biztosan osztható 2-vel. A hárommal való oszthatóságot vizsgálva megállapítjuk, hogy
   a) Ha a, b, c közül az egyik osztható 3-mal akkor a szorzat is osztható hárommal. A szorzat tehát osztható 2-vel és 3-mal.□

   b) Ha a, b, c közül egyik sem osztható 3-mal, akkor belátható, hogy a három számból kettő biztosan $3 \cdot k+1$ vagy $3 \cdot k+2$ alakú. Mindkét esetben a különbségük biztosan osztható hárommal, így a szorzat biztosan osztható 3-mal. A szorzat tehát osztható 2-vel és 3-mal.□

9.2 KITŰZÖTT FELADATOK

1) Mutassuk meg, hogy hat páratlan szám között mindig van kettő, amelyiknek a különbsége osztható 10-zel.

2) Mutasd meg, hogy öt, 10-nél nagyobb prímszám közül mindig kiválasztható kettő, melyek különbsége osztható 10-zel.

3) Mutassuk meg, hogy 7 darab, különböző természetes szám négyzete között van két olyan, amelyiknek a különbsége 10-zel osztható.

4) Egy zsákban 10 fehér, 20 fekete és 30 barna, egyforma méretű zokni van. Hány darabot kell kivenni véletlenszerűen, hogy biztosan legyen közte
   a) Egy pár
   b) Egy pár fehér
   c) Egy pár fekete
   d) Egy pár barna

5) Iskolakezdéskor a matematikatanár igazgató megkérdi a titkárnőt, hogy hány diák van beiratkozva összesen. Miután a titkárnő válaszol, az igazgató azt mondja: „*nos, akkor biztosan van legalább két diák, akik azonos napon ünnepli a születésnapját*”. Legkevesebb hány diák lehet beiratkozva az iskolába? Miért?

6) Adott 4 természetes szám. Bizonyítsuk be, hogy közülük legalább kettő azonos maradékot ad 3-mal osztva!

7) Adott 5 természetes szám. Bizonyítsuk be, hogy a számok *közti különbségek közül legalább egy osztható 4-gyel!*

8) Bizonyítsuk be a következő tételt:

   Tétel: Ha n egy természetes szám, akkor tetszőleges $n + 1$ természetes szám közül kiválasztható kettő úgy, hogy a különbségük osztható legyen n-nel.

   Útmutatás: Tekintsük egyszer az 1, 2, …,n esetet, aztán egy általános esetet, amelyben $k \geq 2$ szám nagyobb mint n.

9) Igaz-e, hogy egy 25 fős osztályban biztosan van 3 diák, akik ugyanabban a hónapban ünneplik a születésnapjukat?

10) Igaz-e, hogy egy 37 fős osztályban biztosan van négy diák, akik ugyanabban a hónapban ünneplik a születésnapjukat?

11) Mutassuk meg, hogy öt, tíznél nagyobb prímszám közül mindig kiválasztható kettő, amelyik különbsége osztható 10-zel.

    Útmutatás: Gondoljunk arra, hogy a 10-nél nagyobb prímek milyen számjegyekben végződhetnek.

12) Bizonyítsd be, hogy 11 egész szám közül mindig kiválasztható kettő, melyek különbsége osztható 10-zel.

13) Bizonyítsd be, hogy 7 darab egymástól különböző természetes szám közül mindig van kettő, amelyek négyzetének különbsége (a^2-b^2) osztható 10-zel.

14) Egy zsákban 11 piros, 8 fehér és 6 fekete golyó van. Hány golyót kell véletlenszerűen kivenni, hogy közte biztosan legyen
    a) fehér vagy fekete,
    b) fehér és fekete,
    c) valamennyi színből legalább 3?

15) Mutasd meg, hogy 5 négyzetszám között mindig van kettő melyeknek összege vagy különbsége osztható 10-zel.

16) Egy ládában négyfajta alma van. Legalább hány almát kell kivenni véletlenszerűen, hogy valamelyik fajtából biztosan legyen két alma?

17) Egy ládában négyfajta alma van, összesen 100 darab, minden darabból 25-25. Legalább hány almát kell kivenni véletlenszerűen a ládából, hogy mindenik fajtából biztosan legyen 2 alma?

18) Egy ládában négyfajta alma van, összesen 100 darab, minden darabból 25-25. Legalább hány almát kell kivenni véletlenszerűen a ládából, hogy mindenik fajtából biztosan legyen 10 alma?

19) Legalább hány lakosa van annak az országnak, ahol biztosan van két olyan lakos, akiknek ugyanolyan a fogazata (azaz ugyanazon a helyen hiányoznak, illetve vannak fogai.)?

20) 40 diák versenyzik 6 feladat megoldásán egy kétnapos matematikai olimpián. Bizonyítsuk be, hogy közülük legalább hat ugyanannyi feladatot oldott meg!

21) Egy kosárban 30 gomba van, mind csiperke vagy rókagomba. Tudjuk, hogy bármely 20 gomba közül legalább egy csiperke, és bármely 12 gomba közül legalább egy rókagomba. Összesen hány rókagomba van ebben a kosárban?

22) Egy dobozban hét pár fehér kesztyű és 5 pár fekete kesztyűt tettünk, majd a doboz tartalmát jó összekevertük.. A kesztyűpárokat nem kötöttük össze! Legkevesebb hány kesztyűt kell kivenni a dobozból, hogy biztosak legyünk benne, hogy egy egyszínű pár kesztyűt is kihúztunk?

10. A STATISZTIKA ELEMEI

A statisztika a társadalmi, gazdasági jelenségek és folyamatok számadatokkal történő leírásával, ezek törvényszerűségeinek feltárásával foglalkozik. A statisztikai analízis kezdeti szakaszában a *leíró statisztikai* elemek az elsődlegesek, amely a következőkkel foglalkozik: adatgyűjtés, adathelyesség ellenőrzése, elhelyezkedési mutatók és szóródási mutatók meghatározása, eloszlás alakjának meghatározása.

A statisztika egyik fő eleme a *statisztikai sokaság*. Statisztikai sokaságnak tekintünk minden olyan halmazt, amely egy statisztikai analízis tárgya (egyetemisták halmaza, város környéki lakótelepek lakosainak halmaza, faluról városba ingázok halmaza, stb.). A *statisztikai mintát* a statisztikai sokaságból vesszük, a fent említett számításokat, meghatározásokat a statisztikai mintán végezzük el. A statisztikai minta halmazának számossága lényegesen kisebb, mint a sokaság halmaza: szinte lehetetlen egy kísérlet során a sokaság összes elemét vizsgálni. A statisztikai sokaság (vagy *populáció*) elemei a *statisztikai egységek* vagy egyedek: ezek a minta és egyben a populáció legkisebb elemei. A minta összes egyedét egy bizonyos jól meghatározott tulajdonság szempontjából vizsgáljuk. Ezek a tulajdonságok az ismérvek. A statisztikai analízis tárgyát képezheti a sokaság egy vagy több ismérvének vizsgálata.

A következő adatsor egy populáció (kisváros) érettségiző diákjainak átlagából választottunk ki véletlenszerűen 32 darabot. Az adatok, *az ismérvértékek* a következők:

9.14 6.21 6.98 6.94 7.18 7.39 8.62 9.58 6.98 8.44 9.93 7.86 8.2 9 6.86 7.02 6.87 8.06 7.78 9.8 6.06 7.63 8.35 7.83 6.32 8.21 6.37 7.39 5.95 8.91 6.34 8.8

Az ismérvek előfordulási számát, abszolút gyakoriságát, hét jegy-*osztályba* soroljuk, aszerint, hogy az érettségi átlag milyen osztályba tartozik:

Osztály	Abszolút gyakoriság
<5	0
5-5.99	1
6-6.99	10
7-7.9	8
8-8.99	8
9-9.99	5
10	0
Összesen	32

Az egyes jegy-osztályok *relatív gyakorisága*:

Osztály	Relativ gyakoriság
<5	0
5-5.99	$\frac{1}{32} = 0.03125$
6-6.99	$\frac{10}{32} = 0.3125$
7-7.9	$\frac{8}{32} = 0.25$
8-8.99	$\frac{8}{32} = 0.25$
9-9.99	$\frac{5}{32} = 0.15625$
10	0
Összesen	1

A következőkben egy sor nevezetes adatjellemzőt tekintünk át:

10.1 A SZÁMTANI ÁTLAG

Az adatok, a jegyek *számtani átlagát* a következő képlettel számoljuk ki:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots x_n +}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

A képletben x_i az *i*-edik adat, esetünkben az i-edik átlag értéke, N a minta elemeinek száma, esetünkben ez 32, $\bar{x}$ pedig a számtani átlag.
A számításokat elvégezve kapjuk, hogy adataink számtani átlaga:

$$\bar{x} = \frac{247}{32} = 7{,}71875.$$

A számtani átlag tulajdonságai:

a) $\sum_{i=1}^{N} x_i = N \cdot \bar{x}$;
b) $\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x}) = 0$;
c) Amennyiben egyes adatok hiányoznak, például nem kaptuk meg az első, az ötödik és a hetedik átlagot, úgy a számításainkban ezeket az értékeket a többi adat számtani átlagával helyettesíthetjük, így az elkövetett hiba minimális lesz.
d) Ha egy minta két részmintából ál, ezeknek elemszáma N_1 és N_2 (például két iskolából kaptunk 16-16 átlagértéket), akkor a teljes minta átlagára nézve igaz, hogy:

$$\bar{x} = \frac{N_1\overline{x_1} + N_2\overline{x_2}}{N_1 + N_2};$$

10.2 SÚLYOZOTT SZÁMTANI ÁTLAG

Súlyozott számtani átlagot akkor számolunk, ha a mért értékek között egyes értékek többször is előfordulnak változó gyakorisággal. Ebben az esetben a számtani átlag meghatározásának módja:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{M} f_i x_i}{N},$$

ahol f_i az egyes átlagok előfordulási száma, x_i az az átlag, amely f_i-szer jelenik meg az adatokban, M az egymástól különböző adatok száma. Megjegyezzük, hogy $\sum_{i=1}^{M} f_i = N$.

Mértani átlag
Egy N elemű minta $x_1, x_2, \ldots, x_N$ megfigyelt pozitív értékeinek mértani átlagát úgy határozzuk meg, hogy az x_i értékeket összeszorozzuk, és a szorzatból gyököt vonunk. A tényezők száma adja meg a gyökvonás fokát.

$$\overline{x_g} = \sqrt[N]{x_1 x_2 \ldots x_N}.$$

Esetünkben az adatok mértani átlaga:

$$\overline{x_g} = \sqrt[32]{9.14 \times 6.21 \times 6.98 \times \ldots \times 8.8} = \sqrt[32]{9.14} \times \sqrt[32]{6.21} \times \ldots \sqrt[32]{8.8} = 7.639971239$$

10.3 HARMONIKUS ÁTLAG

Egy N elemű minta $x_1, x_2, \ldots x_N$ megfigyelt pozitív értékeinek harmonikus átlagát megkapjuk, ha az elemszámot az értékek reciprokjának összegével osztjuk:

$$\bar{x}_h = \frac{N}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{x_i}}.$$

Esetünkben az adatok harmonikus átlaga:

$$\bar{x}_h = \frac{32}{\frac{1}{9.14} + \frac{1}{6.21} + \cdots + \frac{1}{8.8}} = \frac{32}{4.23151} = 7.562312.$$

10.4 NÉGYZETES ÁTLAG

Egy N elemű minta $x_1, x_2, \ldots x_N$ megfigyelt pozitív értékeinek négyzetes (kvadratikus) átlagát úgy kapjuk meg, hogy az értékek négyzeteinek átlagából négyzetgyököt vonunk.

$$\bar{x}_q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N}}.$$

Megállapítjuk, hogy $\left(\bar{x}_q\right)^2 \times N = \sum_{i=1}^{N} x_i^2$.
Esetünkben az adatok négyzetes átlaga:

$$\bar{x}_q = \sqrt{\frac{9.14^2 + 6.21^2 + \cdots + 8.8^2}{32}} = 7.797864.$$

10.5 MEDIÁN - MODUS

A medián (*Me*) olyan helyzeti középérték, amely a nagyság szerint növekvő vagy csökkenő sorrendbe rendezett adatok között a középső érték. Úgy is fogalmazhatnánk, hogy az medián az adatok felezőpontja. Amennyiben az *adatok száma páros*, úgy a két középső érték számtani közepe lesz a medián értéke. Esetünkben:

$$x_1 \quad x_2 \quad .. \boxed{x_{16} \quad x_{17}} \ldots x_{32}$$

a növekvő sorba rendezett adatok 16-i és 17-k eleme 7.63 illetve 7.78. Adataink mediánját a következőképpen számoljuk ki:

$$Me = \frac{7.63 + 7.78}{2} = 7.705.$$

Megjegyezzük, hogy ha csak 31 értékünk lenne, úgy a 7.63-as érték minősülne mediánnak.
A modus (vagy sűrűsödési középpont) azt az értéket jelenti, amely a mintában a leggyakrabban fordul elő. Ez a mi példánkban a 6.98-as érték.

10.6 KVANTILISEK

A kvantilisek az adatok rendezésére, azok eloszlásának megismerésére szolgálnak, az adatok elhelyezkedésének tömör leírását adják. A különböző kvantilisek meghatározása úgy történik, hogy az első lépésben az adatokat nagyság szerint növekvő sorrendbe rendezzük, majd a minimum- és maximumértékek által meghatározott tartományt *k* számú egyenlő részre osztjuk. Az egyes tartományok felső határának értékei lesznek a kvantilis értékek
Nevezetes kvantilisek:

a) Medián: a rendezett adatokat két részre osztjuk, a medián alatt és fölött az értékek 50-50%-a szerepel. Esetünkben a medián 7.705, 16 átlag kisebb, 16 átlag nagyobb, mint 7.705.
b) Kvartilisek: a rendezett tartományt négy részre osztjuk, így 3 kvartilis értéket kapunk. Esetünkben a legkisebb érték 5.95, a legnagyobb érték 9.93, így *k*=4 esetén egy tartomány hossza $\frac{9.93-5.95}{4} = 0.995$. A kvartilisek értékei rendre 6.945, 7.94, 8.935. Az így kiszámított értékosztályok alapján a következő táblázatot kapjuk:

c)

Értékosztályok	Előfordulási szám - gyakoriság
<= 6.945	9
>6.945 és <=7.94	10
>7.94 és <=8.935	8
>8.935 és <= 9.93	5

d) Kvintilisek – a rendezett tartományt 5 egyenlő részre osztjuk

Értékosztályok	Előfordulási szám-gyakoriság
<=5.95 és <=6.746	6
<6.746 és <=7.542	9
<7.543 é <=8.338	7
<8.338 és <=9.93	6
>9.134 és <=9.93	4

e) Decilisek: a rendezett tartományt 10 részre osztjuk
f) Percentilisek: a rendezett tartományt 100 egyenlőrészre osztjuk.

10.7 SZÓRÓDÁS – AZ ADATOK SZÓRÓDÁSÁNAK MÉRÉSE

A vizsgálataink során a mért értékek igen változatosak lehetnek, ezek egymástól és az átlagtól is jelentősen eltérhetnek. A mért adatok között lehetnek hibás mérésből, hibás beírásból vagy más hibaforrás útján bevitt adatok (pld. nem megfelelő csoportot mértünk, stb.). A mért adatokat szűrni kell, a durva mérési hibákat (angolul: *outlier*) ki kell küszöbölni. Számos, durva mérési hibákat kiküszöbölő teszt áll a rendelkezésre, itt a *Grubbs*-tesztet említjük meg, annak ismertetése nélkül.

Az adatok egymástó való eltéréseit, variabilitását *szóródás*nak (diszperziónak) nevezzük. A középérték az adatok centrális tendenciáját fejezi ki, a szóródás az adatok változékonyságáról ad felvilágosítást. A statisztikai vizsgálatokban a középérték és a szórás vizsgálatának, elemzésének kiemelt szerepe van. Megismételjük, hogy szóródást akkor számolunk, ha a durva mérési hibákat már kiszűrtük.

10.8 ÁTLAGOS ABSZOLÚT ELTÉRÉS

Az átlagos abszolút letérés a szóródásnak egy mérőszáma, amelyet a következőképpen számolunk ki:

$$\delta = \frac{\sum_{i=1}^{N}|x_i - \bar{x}|}{N}.$$

Csoportosított adatok esetében:

$$\delta = \frac{\sum_{i=1}^{N} f_i|x_i - \bar{x}|}{N}.$$

Esetünkben az átlagos abszolút eltérés értéke 0.938125.

10.9 SZÓRÁS

A leggyakrabban használt szóródási mutató. Elemzése központi helyet foglal el a statisztikai vizsgálatokban, mivel a statisztikai módszerek jó része a szórásanalízisre épül.

Két szórást ismertetünk:

a) Tapasztalati szórásnégyzet:

$$s^{*2} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{N}.$$

b) Tapasztalati szórás:

$$s^{*} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{N}}.$$

Esetünkben a tapasztalati szórásnégyzet értéke 1.227585938, a szórásé pedig 1.125693335.

c) Korrigált empirikus szórásnégyzet

$$s^{2} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{N-1}.$$

d) Korrigált empirikus szórás

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{N-1}}.$$

Esetünkben a korrigált szórásnégyzet értéke 1.267185484, a korrigált szórásé pedig 1.125693335. Megjegyezzük, hogy a közismert EXCEL program statisztikai programcsomagjának STDEV() függvénye a korrigált szórás értékét számolja ki.

10.10 NORMALITÁS – A NORMALITÁS ELLENŐRZÉSE

A természetben lejátszódó folyamatok egy jó része normális eloszlást követ. A normális eloszlás egy olyan modell, amely az adatoknak az átlag körüli szóródását írja le. Fontosak azok a vizsgálatok, amelyek azt vizsgálják, hogy egy eloszlás mikor tekinthető normálisnak. A gyakorlatban szigorúan vett normális eloszlással nem találkozunk, így a normalitástól való eltérés ellenőrzése minden esetben indokolt.

A normalitás ellenőrzésére két értéket mutatunk be a ferdeséget (angolul: *skewness*) illetve a lapultságot (angolul: *kurtosis*). A fenti értékek kiszámításához szükségünk van a momentumok kiszámítására. Négy momentummal dolgozunk:

$$m_1 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})}{N},$$

$$m_2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{N},$$

$$m_3 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^3}{N},$$

$$m_4 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^4}{N}.$$

A momentumok meghatározása után rátérhetünk a csúszás mértékét meghatározó *ferdeség* tendencia vizsgálatára. Meghatározzuk

$$g_1 = \frac{m_3}{m_2\sqrt{m_2}}.$$

a) Ha az eloszlás szimmetrikus, akkor $m_3 = 0$ és $g_1 = 0$.
b) Ha $g_1 > 0$ az eloszlás pozitív ferdeségű, jobbra eltolt.
c) Ha $g_1 < 0$ az eloszlás negatív ferdeségű, balra eltolt.

Esetünkben

m_1	0.0000000000000
m_2	1.227585938
m_3	0.356287699
m_4	3.178300159

$$g_1 = \frac{0.356287699}{1.227585938\sqrt{1.227585938}} = 0.261952756.$$

A *lapultság* tendencia vizsgálatához kiszámoljuk

$$g_2 = \frac{m_4}{{m_2}^2} - 3$$

értékét.
a) Normális eloszlás esetén $g_2 = 0$.
b) Ha $g_2 > 0$ esetén az eloszlás grafikonja a normálisnál csúcsosabb, míg
c) $g_2 < 0$ esetén az eloszlás grafikonja a normálisnál laposabb.

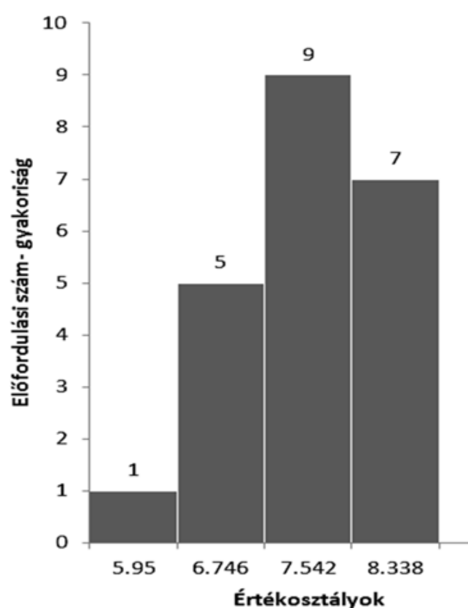
Esetünkben

$$g_2 = \frac{3.178300159}{1.227585938^2} - 3 = -0.890929486.$$

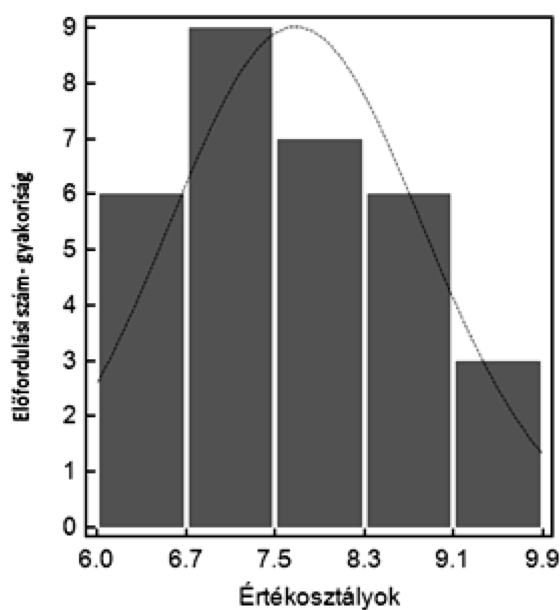
Megállapítjuk, g1 és g2 értékeit figyelembe véve, hogy adataink normális eloszlása jobbra tolt és lapult. Adatainkat az 1. és 2. ábrán szemléltetjük.

10.11 ADATOK ÁBRÁZOLÁSA- HISZTOGRAM LÉTREHOZÁSA.

Az adatok ábrázolása a derékszögű koordináta rendszerben történik. Az y tengelyre a gyakoriság értékét, az x tengelyre a valódi osztályhatárok adatait mérjük fel, és minden osztályhoz téglalapot rajzolunk. Egy téglalap szélessége az osztályköz, középpontja az osztályközép, magassága az osztályhoz tartozó gyakoriságot jelenti. A téglalapok területe azt fejezi ki, hogy az adatok hányadrésze esik az illető osztályba.



1. ábra



2. ábra

Az 1. ábra az *Excel* program statisztikai programcsomagjával készült, eben az esetben négy értékosztállyal ábrázoltuk a hisztogramot, a 2 ábrát pedig a *Medcalc* harmincnapos ingyenes változatával. Ebben az esetben az értékosztályok száma öt.

IRODALOMJEGYZÉK

1. Ábrahám István, Bedő László, Czétényi Csaba, Frigyesi Miklós, Juhász Attila, Korányi Erzsébet (1987). *Matematika a felvételi vizsgára készülők részére.* Tankönyvkiadó, Budapest
2. Bălăucă Artur (2012) *Aritmetică – 1300 de probleme semnificative – Olimpiade, Concursuri şi Centre de Excelenţă.* Editura Taida
3. Bende Imre et. all.(1998). *Elemi matematika példatár az általános képzéshez a tanítóképző főiskolák számára.* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.
4. Donáth Árpád (2009). *Összefoglaló matematikából tanítóknak (véglegesítő vizsga).* Hoppá Kiadó.
5. Gerőcs László, Orosz Gyula, Paróczay József, Szászné Simon Jolán (2009). *Matematika Gyakorló és érettégire felkészítő feladatgyűjtemény I.* Nemzeti Tankönyvkiadó.
6. Gheorghe Căiniceanu (coord)(2016) *Matematică – Olimpiade şi concursuri şcolare – clasele IV-VI* – 2015 – 2016, Editura Paralela 45
7. Gheorghe Căiniceanu (coord)(2017). *Matematică – Olimpiade şi concursuri şcolare – clasele IV-VI* – 2016 – 2017, Editura Paralela 45
8. http://refkol.ro/tuzson/anyagok/ (2018 - május)
9. http://subiecte.edu.ro (2018 május)
10. http://www.bolyaiverseny.hu/matek/ (2018 május)
11. https://hu.wikipedia.org/wiki/N%C3%A9gyzetsz%C3%A1mok (2018 május)
12. https://kobak.org/oszthatosagi-szabalyok/ (2018 - május)
13. Király Balázs, Tóth László (2011). *Kombinatorika jegyzet és feladatgyűjtemény – kézirat*. Pécsi Tudományegyetem
14. Kiss Ernő (1987). *A számelmélet elemei*. Dacia könyvkiadó Kolozsvár Napoca.
15. Linţ M., Linţ D., Marinescu R., Marinescu D. (2014). *Matematică de excelenţă pentru concursuri, olimpiade şi centre de excelentă - clasa a V-a*. Editura Paralela 45.
16. Major Levente (1997). *Aritmetika és Algebra*. Mentor Kiadó Marosvásárhely.
17. Makkosházi Matematikaverseny (2009). *Feladatok 1989 -2008* Mozaik Kiadó Szeged.
18. Matematikai kislexikon (1983). Kriterion Könyvkiadó Bukarest.
19. Matematikai versenytesztek (2002). *A Zrínyi Ilona Matematikaverseny feladatai és megoldásai '98*. Mozaik kiadó, Szeged.
20. Matematikai versenytesztek (2002). *A Zrínyi Ilona Matematikaverseny feladatai és megoldásai '97.* Mozaik kiadó, Szeged.
21. Matematikai versenytesztek (1995). *A Zrínyi Ilona Matematikaverseny feladatai és megoldásai 1994*. Mozaik Oktatási Stúdió, Szeged.
22. Năchită P., Năchită C.E.(2012). *Exerciţii şi probleme pentru cercurile de matematică – clasa a V-a*. Editura Nomina.
23. Öszefoglaló feladatgyűjtemény matematikából (1987). Tankönyvkiadó Budapest.
24. Oysten Ore (1977). *Bevezetés a számelmélet világába.* Gondolat, Budapest 1977.
25. Reiman István (1992). *Matematika.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1992.
26. Róka Sándor (2010). *2000 feladat az elemi matematika tárgyköréből*. Typotex, Budapest.
27. Róka Sándor (2016). *Furfangos logi-sztorik*. Tóth Könyvkereskedés és Kiadó Kft.
28. Róka Sándor (2016). *Négyzetszámok*. Tóth Könyvkereskedés és Kiadó Kft.
29. Róka Sándor (2016). *Számelmélet*. Tóth Könyvkereskedés és Kiadó Kft.
30. Róka Sándor: Feladatok matematika szakkörre – Tóth Könyvkereskedés és Kiadó Kft.
31. Róka Sándor (2000). *Skatulyaelv*. T.T.K. Debrecen.

32. Roşu Mihail (2010). *Elemente de matematică pentru profesorii din învăţământul primar*. Editura Aramis.
33. Solti György (1993). *Valószínűségszámítás – Példatár*. Műszaki Könyvkiadó Budapest.
34. Ţelinoi Petre (1991). *Culegere de exerciţii şi probleme de aritmetică pentru clasele IV-VIII.* Editura Porto Franco, Galaţi.
35. Tuzson Zoltán (2011). *Hogyan oldjunk meg aritmetika feladatokat? Módszertani feladatgyűjtemény, Harmadik bővített kiadás.* Ábel Kiadó, Kolozsvár.



ISBN: 978-606-37-0398-0